Notions fondamentales de L1–L2
Contrôle continu du 3 octobre 2019 (durée 1h).

Nom :	Prénom :	Note attendue : A B C

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
— donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.
Pour tout cela, ne pas hésiter à bien utiliser le brouillon !

Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications

Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), montrer que f est injective (resp. g est surjective).

En déduire que f, g et h sont toutes les trois bijectives si et seulement si $g \circ f$ et $h \circ g$ le sont.

Soit $P = 3X^5 + 10X^3 + 15X + a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Calculer P' et en déduire que P admet toujours 5 racines simples (dans $\mathbb{C}$).

Calculer la limite de $\frac{1}{\arctan(x)^2} - \frac{1}{\tan(x)^2}$ lorsque $x \to 0$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses sous-espaces propres. Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

Problème : différence symétrique.

Pour des parties A et B d'un ensemble E, on note $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (on rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$, où ^{c} désigne le complémentaire dans E).

Montrer que si A, B et C sont des parties de E, alors $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

A-t-on également $(A \cap B)\Delta C = (A\Delta C) \cap (B\Delta C)$?

Montrer que si A, B et C sont des parties de E, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des sous parties de E. On peut donc écrire d'après la question précédente $A_1\Delta A_2\Delta \dots \Delta A_n$ sans se soucier de l'ordre des parenthèses. Pour $x \in E$, on note $\mathcal{I}_x = \{i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\}$ l'ensemble des indices des ensembles contenant x. Montrer que $x \in A_1\Delta A_2\Delta \dots \Delta A_n$ si et seulement si le cardinal de I_x est impair.