Nom : Prénom : Note attendue : A B C

On pose $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
On pourra utiliser (et démontrer) que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$, montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que la famille $(f^{n-k}(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre (pour un tel x).
Exprimer la matrice de f dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ et montrer que $f^n = 0$.

Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
On pose $F = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ et $G = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

Donner une phrase (courte) en français pour décrire F (sans utiliser « et » ni « ou », on pourra utiliser « deux ».)

Montrer que si $x \in A$, alors $x \in F \Leftrightarrow x \in G$. Montrer la même chose si $x \in E \setminus A$. Qu'en déduit-on ?