Nom : Prénom : Note attendue : A B C

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.

On définit une relation sur F par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur F. Quelles sont ses classes d'équivalence ?

On note $\pi : F \to F/\mathcal{R}$ la surjection canonique : l'application $x \mapsto \pi(x) = \overline{x} = \{y \in F, x\mathcal{R}y\}$.
Montrer que $g \circ f$ est surjective si et seulement si g et $\pi \circ f$ le sont.

Pour $x \in]0,1[$, on note $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$. Montrer que f se prolonge en une série entière au voisinage de 0, donner ses coefficients, son rayon de convergence R et une expression simple de sa valeur sur $]-R, 0[$.
Indication : on pourra dériver $y \mapsto \ln(1+y) - \ln(1-y)$.