Nom : Prénom : Note attendue : A B C

Soient E, F, et I des ensembles, $f : E \to F$ une application. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de F, montrer que $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Que peut-on dire de $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$?

Calculer $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable (faire « disparaître » les $\sqrt{x}$).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1[$. Donner les définitions complètes, à l'aide de quantificateurs (sans utiliser sup ni lim, etc.), de

— la suite converge simplement vers 0 (la fonction nulle) sur $[0,1[$,

— la suite converge uniformément vers 0 sur $[0,1[$,

— la suite ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1[$.

Montrer que si l'on a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels dans $[0,1[$ vérifiant $f_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0.

Donner un exemple (au dos de la feuille) d'une telle suite de fonctions continues sur $[0,1[$ convergeant simplement mais pas uniformément vers 0 sur $[0,1[$. ♣ De même sur $[0,1]$?