Notions Fondamentales L1–L2
Examen du 24 octobre 2017 — Éléments de correction.

1 Questions de type « savoir-faire »

1.1. Si $y \in f(A \cap B)$, prenons un $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, alors $y \in f(A)$, et comme $x \in B$, alors $y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$. On a donc montré que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et on n'a pas utilisé l'injectivité de f pour montrer cette inclusion.

Soit maintenant y dans $f(A) \cap f(B)$. Comme $y \in f(A)$, prenons un $x_A \in A$ tel que $y = f(x_A)$. De même $y \in f(B)$, donc on prend un $x_B \in B$ tel que $y = f(x_B)$. Comme f est injective et que $f(x_A) = y = f(x_B)$, on a donc $x_A = x_B$. Donc $x_A \in A \cap B$ puisque $x_B \in B$. Donc comme $y = f(x_A)$, on a bien $y \in f(A \cap B)$ et on a bien montré que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. En conclusion on a donc bien $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

Enfin, dans le cas où f n'est pas injective, prenons $x_1 \neq x_2$ dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En posant $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, on a $A \cap B = \emptyset$, donc $f(A \cap B) = \emptyset$. Mais $f(A) = f(B) = \{f(x_1)\}$, donc $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\}$, qui n'est pas vide. On a donc $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

1.2. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\right)$ et on sait calculer la somme d'une série géométrique de raison e^{ix}. Si $e^{ix} = 1$, c'est-à-dire si x est de la forme $2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, alors la somme vaut n et sa partie réelle vaut également n. Sinon, on écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \frac{1 - (e^{ix})^n}{1 - e^{ix}}.$$

Il y a deux manières de trouver la partie réelle de ce nombre : soit on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (pour se retrouver avec un module au carré au dénominateur), et on obtient

$$\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{(1 - e^{inx})(1 - e^{-ix})}{(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})} = \frac{1 - e^{inx} - e^{-ix} + e^{i(n-1)x}}{2 - e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{1 - e^{inx} - e^{-ix} + e^{i(n-1)x}}{2 - 2\cos x},$$

dont la partie réelle est $\frac{1 - \cos(nx) - \cos x + \cos((n-1)x)}{2 - 2\cos x}$ (ce résultat sous cette forme est accepté, bien que ce ne soit pas l'expression standard).

Sinon on peut multiplier en haut et en bas par l'expression correspondant au « demi-angle », pour simplifier les calculs :

$$\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n-1}{2}x} \frac{-2i\sin(\frac{nx}{2})}{-2i\sin(\frac{x}{2})},$$

dont la partie réelle est $\cos(\frac{n-1}{2}x)\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ (on observe bien que le dénominateur ne s'annule pas si x n'est pas de la forme $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$).

En conclusion on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \begin{cases} \cos(\frac{n-1}{2}x)\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1-\cos(nx)-\cos x+\cos((n-1)x)}{2-2\cos x} & \text{si } \frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z} \\ n & \text{si } \frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1.3. La manière la plus rapide est d'écrire, pour x proche de 0 et $x \neq 0$, que

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^2 \sin^2 x},$$

de sorte qu'en utilisant que $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on obtient que $\sin x \sim x$ et $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$ lorsque $x \to 0$. On a donc un quotient et produit d'équivalents à faire pour obtenir que

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \sim \frac{-\frac{x^3}{6} \cdot 2x}{x^4} = -\frac{1}{3} \text{ lorsque } x \to 0.$$

1.4. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. La trace de A vaut $5+8+5=18$.

On écrit
$$A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$
qui est constitué de trois vecteurs colonnes tous proportionnels par exemple à celui du milieu, $Ae_2 - 9e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, qui est non nul. Donc on a bien que $\mathrm{Im}(A-9I_3) = \mathrm{Vect}(Ae_2 - 9e_2)$. On a donc que $A-9I_3$ est de rang 1. Donc par le théorème du rang, $\dim(\ker(A-9I_3)) = 3-1 = 2$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 9 est donc de dimension 2.

Comme A est diagonalisable, elle s'écrit donc de la forme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. La deuxième valeur propre se calcule à l'aide de la trace, puisque celle de A et celle de D sont les mêmes. On obtient donc $9+9+\lambda = 18$, ce qui donne que $\lambda = 0$.

Les deux valeurs propres de A sont donc 9 et 0, et les espaces propres associés sont respectivement de dimension 2 et 1.

1.5.
— Convergence simple de (f_n) vers 0 : $\forall x \in [0,1[, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |f_n(x)| < \varepsilon$.
— Convergence uniforme de (f_n) vers 0 : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in [0,1[, |f_n(x)| < \varepsilon$.
— Négation de la convergence uniforme : $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, \exists x \in [0,1[, |f_n(x)| \geqslant \varepsilon$.

Si l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [0,1[, f_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$, alors on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on pose donc $n = n_0$, et on prend $x_n \in [0,1[$ tel que $f_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$. On a donc bien $n \geqslant n_0$ et $|f_n(x)| \geqslant f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} = \varepsilon$. Donc on a bien montré la propriété de la négation de la convergence uniforme.

Pour un exemple, on peut prendre $f_n(x) = x^n$. C'est bien une fonction continue sur $[0,1[$. Si $0 \leqslant x < 1$, on sait que $x^n \to 0$, donc la suite converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$. Si on prend $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de prendre $x_n = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ qui appartient bien à $[0,1[$, et pour lequel on a $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$. Donc on vérifie bien la propriété donnée (si on pinaille, la propriété demandait « $\forall n \in \mathbb{N}$ », on peut prendre $x_0 \in [0,1[$ arbitraire et on a bien $f_0(x_0) = 1 \geqslant \frac{1}{2}\ldots$).

2 Problème : autour des polynômes de Legendre

2.1. Pour montrer que Λ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R})$, il faut montrer que Λ est linéaire, et que $\Lambda(f)$ est de classe C^∞ si f est de classe C^∞. En effet, si c'est le cas, alors f' est aussi C^∞, puis comme q est C^∞, on obtient que $q\,f'$ est C^∞, et que sa dérivée $(q\,f')'$ l'est aussi. Pour la linéarité, on utilise la linéarité de la dérivation et du produit par une fonction. On a bien en effet que si f et g sont de classe C^∞, alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $(q\ (\lambda f + \mu g)')' = (q(\lambda f' + \mu g')') = (\lambda q\,f' + \mu q\,g')' = \lambda (q\,f')' + \mu (q\,g')'$.

Si la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1, alors le numérateur doit s'annuler en ces deux points : $-a+b = a+b = 0$. On en déduit en faisant la somme que $2b = 0$, donc $a = b = 0$. Dans ce cas, la fonction considérée est nulle et se prolonge bien par continuité en -1 et en 1.

Si $f \in \ker \Lambda$, alors on a $(qf')' = 0$, donc qf' est constante, donc f' (qui est C^∞) est de la forme $x \mapsto \frac{c}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, donc par le calcul précédent, $c = 0$. Donc f' est nulle sur $\mathbb{R}$ (on a obtenu la valeur en -1 et 1 par continuité), donc f est constante. Réciproquement si f est constante alors on a bien $\Lambda(f) = 0$.

De même, si la fonction constante c est dans l'image de Λ, alors on doit avoir $f'(x) = \frac{cx+d}{1-x^2}$, et donc $c = d = 0$. La fonction nulle est bien dans l'image de Λ (c'est $\Lambda(0)$ par exemple).

2.2. Si f est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors f' est bien un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis en multipliant par le polynôme $q = 1 - X^2$, on obtient bien un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Enfin en dérivant, on obtient bien que $(q\,f')'$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme Λ envoie donc bien l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ (qui est bien un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$) dans lui-même. On a alors (pour $k \geqslant 2$) :
$$\Lambda(X^k) = ((1-X^2)kX^{k-1})' = -2kX^k + (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} = -k(k+1)X^k + k(k-1)X^{k-2}.$$
Pour $k = 0$ ou 1, on a $\Lambda(1) = 0$ et $\Lambda(X) = -2X$.

La matrice de Λ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$, est donc la matrice carré de taille $n+1$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & k(k-1) & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -k(k+1) & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+1) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous distincts, donc son polynôme caractéristique a $n+1$ racines distinctes : toutes les valeurs propres sont de la forme $\lambda_k = -k(k+1)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, et sont donc simples.

2.3. Si $P_n = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d = 0$. On obtient $\Lambda(P_n) = \sum_{k=0}^{d} a_k(-k(k+1)X^k + k(k-1)X^{k-2})$, et on regarde son terme de plus haut degré qui est donc $-d(d+1)a_d X^d$. Si $\Lambda(P_n) = -n(n+1)P_n$, alors les coefficients de plus haut degré sont égaux, autrement dit $-d(d+1)a_d = -n(n+1)a_d$, et donc comme $a_d \neq 0$, on obtient $n(n+1) = d(d+1)$, donc $n = d$ (la fonction $k \mapsto k(k+1)$ est strictement croissante dans $\mathbb{N}$, donc injective). Donc P_n est de degré n.

Et on obtient donc que $(P_0, \ldots, P_k)$ est une famille de $k+1$ polynômes de degrés $0, 1, \ldots k$ dans $\mathbb{R}_k[X]$, donc elle est libre : si on avait une combinaison linéaire avec des coefficients non-nuls de ces polynôme, en prenant le coefficient du polynôme de plus haut degré, on obtiendrai qu'il s'exprime comme combinaison linéaire des autres, qui sont tous de degré strictement inférieurs, d'où la contradiction. C'est donc une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Et comme $\Lambda(P_i) = \Lambda_i(P_i) = -i(i+1)P_i$, on a bien que les P_i sont des vecteurs propres de Λ.

En écrivant $Q_n(X) = P_n(-X)$, on obtient $Q_n'(X) = -P_n'(X)$ puis $Q_n''(-X) = P_n(-X)$. On obtient que

$$\begin{aligned} \Lambda_n(Q_n)(X) = (1-X^2)Q_n''(X) - 2XQ_n'(X) &= (1-X^2)P_n''(-X) + 2XP_n'(-X) \\ &= \Lambda(P_n)(-X) = -n(n+1)P_n(-X) = -n(n+1)Q_n(X). \end{aligned}$$

Donc Q_n est aussi un vecteur propre de Λ_n associé à $-n(n+1)$. Comme les valeurs propres sont simples, l'espace propre associé est de dimension 1, et on a donc que $Q_n = \alpha P_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $P_n(-X) = \alpha P_n(X)$. En regardant les termes de plus haut degré, si $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, on obtient que $a_n(-X)^n = \alpha a_n X^n$, donc $\alpha = (-1)^n$. On a donc bien que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

2.4. On fait une intégration par partie, pour $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \Lambda(f)(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (q\, f')'(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \Big[(1-x^2)\, f'(x)g(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, f'(x)g'(x)\mathrm{d}x, \\ &= -\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, f'(x)g'(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme ce dernier terme est symétrique en f et en g, en inversant le rôle de f et g dans le calcul, on obtient donc le même résultat pour le calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\Lambda(g)(x)\mathrm{d}x$.

On a donc, si $\Lambda(f) = \lambda f$ et $\Lambda(g) = \mu g$ avec $\lambda \neq \mu$, que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \lambda f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mu g(x)\mathrm{d}x$, c'est à dire $(\lambda - \mu)\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, ce qui donne bien que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

Pour $Q \in \mathbb{R}_k[X]$, on peut écrire Q dans la base $P_0, \ldots, P_k$: on écrit $Q = \sum_{i=0}^{k} a_i P_i$.

Et on obtient donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k} \int_{-1}^{1} P_i(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$, puisque pour $i \leqslant k < n$, P_i et P_n sont des vecteurs propres de Λ pour des valeurs propres $-i(i+1)$ et $-n(n+1)$, qui sont différentes.

2.5. Si on note $y_1 < \cdots < y_p$ les racines de QP_n qui appartiennent à $]-1,1[$. Alors elles sont toutes de multiplicité paire : si y_i correspond à un x_j, alors c'est une racine de multiplicité impaire pour P_n et de multiplicité 1 pour Q, donc de multiplicité paire pour QP_n. Et si y_i ne correspond à aucun x_j, alors ce n'est pas une racine de Q, donc c'est une racine de P, mais qui est alors déjà de multiplicité paire.

On peut donc montrer que QP_n reste de signe constant sur $]-1,1[$: en effet il est de signe constant sur $[y_i, y_{i+1}]$, puisqu'il n'a pas de racine à l'intérieur de cet intervalle, pour $i \in [\![0,p]\!]$ (en notant $y_0 = -1$ et $y_{p+1} = 1$). Et comme y_i est une racine de multiplicité paire, alors le signe est le même sur $[y_{i-1}, y_i]$ et $[y_i, y_{i+1}]$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. Donc le signe est le même sur tout $[-1,1]$.

Si $m < n$, alors $Q \in \mathbb{R}_m[X]$, et d'après la question précédente, on a alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$. Mais comme le polynôme QP_n est de signe constant sur $[-1,1]$ et que son intégrale est nulle, alors il est nul sur cet intervalle. Donc c'est le polynôme nul, ce qui est une contradiction puisque P est de degré n et Q de degré m (aucun des deux n'est nul).

On a donc $m \geqslant n$, et comme P_n a au plus n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), on a donc $m = n$, le polynôme a donc n racines distinctes, qui sont donc simples.

2.6. On sait que P_0 est un polynôme constant qui vaut 1 en 1, donc $P_0 = 1$. De même P_1 est un polynôme impair, de degré 1, donc de la forme aX, avec $a \neq 0$, et comme $P_1(1) = 1$, alors $a = 1$. Donc $P_1 = X$.

Enfin P_2 est un polynôme pair, de degré 2, donc de la forme aX^2+b. On a que $\Lambda(P_2) = a\Lambda(X^2) = -6aX^2+2a$ puisque $\Lambda(b) = 0$. On obtient donc, comme $\Lambda(P_2) = -6P_2$, que $-6b = 2a$. D'autre part, comme $P_2(1) = 1$, on obtient $a + b = 1$, soit $(-3b) + b = 1$. Donc $b = -\frac{1}{2}$, et $a = -3b = \frac{3}{2}$.

On obtient donc $P_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Séries de Legendre

2.7. On fait une intégration par parties ($u(x) = P_n(x)^2$, $v'(x) = 1$) pour obtenir

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x = [xP_n^2(x)]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xP_n'(x)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

Comme $P_n(1) = 1$ et que $P_n(-1) = (-1)^n$, on a bien que $P_n(-1)^2 = P_n(1)^2 = 1$, ce qui donne le résulat demandé.

On regarde le terme de degré n de $Q = XP_n' - nP_n$, qui vaut donc $X \cdot na_nX^{n-1} - na_nX^n = 0$ si celui de P_n est a_nX^n. Comme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et que son terme de degré n est nul, c'est donc un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a donc d'après la première partie que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$ soit encore $\displaystyle\int_{-1}^{1} xP_n'(x)P_n(x)\mathrm{d}x = n\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x$.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x = 2 - 2n\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x$,, soit encore $\displaystyle(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\mathrm{d}x = 2$, ce qui donne le résultat demandé.

On pose $u(x) = P_n(x)^2 + \frac{1-x^2}{n(n+1)}P_n'(x)^2$. On dérive pour obtenir

$$\begin{aligned}
u'(x) &= 2P_n'(x)[P_n(x) + \frac{1-x^2}{n(n+1)}P_n''(x) - \frac{x}{n(n+1)}P_n'(x)] \\
&= 2P_n'(x)[P_n(x) + \frac{\Lambda(P_n)(x)}{n(n+1)} + \frac{x}{n(n+1)}P_n'(x)] \\
&= \frac{2x}{n(n+1)}(P_n'(x))^2,
\end{aligned}$$

qui est positif sur $[0,1]$. Donc $P_n(x)^2 \leqslant u(x) \leqslant u(1) = P_n(1)^2 = 1$ pour $x \in [0,1]$. Comme $P_n(-x)^2 = P_n(x)^2$, on obtient aussi que $P_n(x)^2 \leqslant 1$ pour $x \in [-1,0]$.

En conclusion pour tout $x \in [-1,1]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$.

2.8. Comme $|P_n(x)| \leqslant 1$ sur $[-1,1]$, on a que $\|a_kP_k\|_\infty \leqslant |a_k$, donc si $\sum a_k$ est absolument convergente, alors $\sum a_kP_k$ est normalement convergente dans $C^0([-1,1])$, donc la série de fonctions converge uniformément, vers une fonction $g \in C^0([-1,1])$.

D'autre part, en utilisant que $\int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)\mathrm{d}x$ vaut 0 si $n \neq k$ et $(n+\frac{1}{2})^{-1}$ si $n = k$, on obtient que $a_k(S_n(f)) = a_k(f)$ dès que $n \geqslant k$. En passant à la limite dans l'intégrale (par convergence uniforme de $S_n(f)$ vers g), on obtient que $a_k(g) = a_k(f)$.

On a donc que $\int_{-1}^1 P_k(x)(f-g)(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout k, et donc si $P \in R_n(x)$, on peut l'exprimer comme une combinaison linéaire des P_k pour $k \in [\![0,n]\!]$, et on obtient donc $\displaystyle\int_{-1}^1 (f(x)-g(x))P(x)\mathrm{d}x = 0$.

Par le théorème d'approximation de Weierstrass, on sait construire une suite de polynômes Q_n qui converge uniformément vers $h = f-g$ sur $[-1,1]$. On en déduit alors que $0 = \displaystyle\int_{-1}^1 h(x)Q_n(x)\mathrm{d}x$ converge vers $\displaystyle\int_{-1}^1 h(x)^2\mathrm{d}x$, qui vaut donc 0. En effet, on a

$$\left|\int_{-1}^1 h(x)^2\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 h(x)Q_n(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^1 h(x)[h(x)-Q_n(x)]\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\|h\|_\infty \|h-Q_n\|_\infty \to 0.$$

Et on obtient donc $h^2 = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle), donc $f = g$.

2.9. En écrivant que $P_n(x) = -\frac{1}{n(n+1)}\Lambda(P_n)(x)$ et en utilisant la formule de symétrie de la question 2.4, on obtient que $a_n(f) = -\frac{1}{n(n+1)}a_n(\Lambda(f))$, puis en réitérant, que $a_n(f) = \frac{1}{n^2(n+1)^2}a_n(\Lambda(\Lambda(f)))$. Donc si f est dans $C^\infty([-1,1])$, alors $\Lambda(\Lambda(f))$ est une fonction continue sur $[-1,1]$, donc bornée par $M > 0$. En utilisant que $|P_n(x)| \leqslant 1$, on obtient donc que $|a_n(\Lambda(\Lambda(f)))| \leqslant 2(n+\frac{1}{2})M$, puis que $|a_n(f)| \leqslant \frac{(2n+1)M}{n^2(n+1)^2}$. Par critère de Riemann, la série $\sum a_n(f)$ est donc bien absolument convergente, et on utilise la question précédente pour conclure.

Interpolation et quadratures de Gauss-Legendre

2.10. Soit on écrit que l'application linéaire Φ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à P associe $(P(x_1),\dots,P(x_n))$ est injective (son noyau est nul, puisque tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n racines est nul), donc surjective pour des raisons de dimension, et on a alors $L_i = \Phi^{-1}(e_i)$.

Soit on écrit directement la formule pour L_i (appelé polynôme interpolateur de Lagrange) :

$$L_i(X) = \frac{\prod_{i\neq j}(X-x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)},$$

qui vérifie bien les conditions données, et on écrit que si deux polynômes vérifient ces conditions, leur différence a donc n racines et est donc nulle.

Pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a donc $R(X) = \sum_{i=1}^n R(x_i)L_i(X)$. En effet par les propriétés des L_i, on a que $Q = R - \sum_{i=1}^n R(x_i)L_i$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'annulant en n points (tous les x_i), donc $Q = 0$.

Donc on a $\displaystyle\int_{-1}^1 R(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n R(x_i)\int_{-1}^1 L_i(x)\mathrm{d}x$. En posant $w_i = \int_{-1}^1 L_i(x)\mathrm{d}x$, on obtient donc bien la formule demandée : $\displaystyle\int_{-1}^1 R(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n w_iR(x_i)$, et ce quel que soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2.11. Si $P \in R_{2n-1}[X]$, on écrit $P = QP_n + R$, avec R de degré strictement inférieur à celui de P_n (qui est n). On a donc que le degré de Q est strictement inférieur à n, en effet si on avait $\deg Q \geqslant n$, alors onaurait $\deg QP_n \geqslant 2n$, et comme $\deg R < n$, on obtient que $\deg QP_n = \deg(QP_n + R) = \deg P$, mais $\deg P < 2n$.

On a donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et d'après la première partie, on obtient donc $\displaystyle\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0$. On obtient donc que $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 R(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n w_iR(x_i) = \sum_{i=1}^n w_iP(x_i)$, puisque $P_n(x_i) = 0$.

Le polynôme L_i^2 est dans $\mathbb{R}_{2n-2}[X]$. On obtient donc $\displaystyle\int_{-1}^1 L_i(x)^2\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n w_jL_i(x_j)^2 = w_i$, ce qui montre bien que $w_i > 0$ (si w_i était nul, alors le polynôme L_i^2 serait nul, ce qui n'est pas le cas).

2.12. Comme $QQ_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on obtient donc $\displaystyle\int_{-1}^1 Q_n(x)Q(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n v_iQ(y_i)Q_n(y_i) = 0$ puisque $Q_n(y_i) = 0$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Cette formule peut se réinterpréter en disant que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ donné par $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension n et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de dimension 1. Donc comme P_n et Q_n sont dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ils sont colinéaires.

On obtient donc que les racines de Q_n et celles de P_n sont les mêmes, ce qui donne que $y_i = x_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Puis en écrivant la formule pour L_i, on obtient que $w_i = \displaystyle\int_{-1}^1 L_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n v_jL_i(x_j) = v_i$.