MIDO - L3 Mathématiques Appliquées 2019-2020

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Notions fondamentales de L1–L2

Examen du 28 octobre 2019 (durée 2h).

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, n'utilisez la dernière feuille blanche qu'en cas d'extrême nécessité.

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
- écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
- pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
- donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.

Pour tout cela, ne pas hésiter à utiliser le brouillon à bon escient !

Les trois premiers exercices compteront pour environ un tiers de la note, le problème comptant pour le reste.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1 + e^{nx})$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1. *Indication :* « deviner » l'expression de f sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, puis étudier les variations de $f_n - f$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$.

PARTIE À RABATTRE

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Si A est un sous-ensemble de F, on note $g_{|A}$ la restriction de g à A : l'application de A dans G telle que pour tout x dans A, $g_{|A}(x) = g(x)$.

Montrer que ($g \circ f$ injective) $\Leftrightarrow$ (f injective et $g_{|f(E)}$ injective).

Montrer sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Calculer la trace de A et le rang de $A - 7I_3$. En déduire les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés, sans calculer le polynôme caractéristique.

Problème : points fixes de fonctions aléatoires.

Les questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes, on peut admettre certains résultats pour passer à la suite (et il est recommandé de tout lire, les questions suivantes pouvant donner un moyen de vérifier ses réponses). Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Dans tout ce problème, on note $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant exactement k éléments.

Partie 1 : formule du crible (généralisée).

Soit E un ensemble et f une fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties A et B de E disjointes (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$), on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

En remarquant que $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ est l'union disjointe de $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et de $\mathcal{Q}_{k,n} = \{\mathcal{I} \cup \{n+1\}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}_{k-1}(\llbracket 1, n \rrbracket)\}$ (si $k \geqslant 1$), en déduire que si $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont des parties de E, alors $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} f\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right)$.

Partie 2 : fonctions arbitraires de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

On note F l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On note $F_0 \subset F$ l'ensemble des applications φ n'ayant aucun point fixe (c'est à dire d'indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\varphi(i) = i$). Et plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, on note $F_k \subset F$ l'ensemble des applications φ ayant exactement k points fixes.

Quel est le cardinal de F ? Quel est le cardinal de F_0 ? On note $p_{0,n}$ la probabilité qu'une fonction tirée uniformément au hasard dans F soit dans F_0. Que vaut $p_{0,n}$?

Calculer la limite de $(1-\frac{1}{n})^n$ lorsque $n \to \infty$ (penser à utiliser ln).
En déduire la limite de $p_{0,n}$ lorsque $n \to \infty$, notée p_0.

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$ et si l'on note $G_{\mathcal{I}} \subset F$ l'ensemble des fonctions ayant pour points fixes les éléments de $\mathcal{I}$ (et seulement ceux-ci), quel est le cardinal de $G_{\mathcal{I}}$? En déduire le cardinal de F_k.

On note $p_{k,n}$ la probabilité qu'une fonction tirée uniformément au hasard dans F ait exactement k points fixes. Montrer que $p_{k,n} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(1-\frac{1}{n})^{n-k}$, et calculer la limite de $p_{k,n}$ lorsque $n \to \infty$, notée p_k (on pourra calculer la limite de $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$ lorsque $n \to \infty$).

Montrer que $\sum_{k\geqslant 0} p_k = 1$. Quel est le nom de la loi d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?

Partie 3 : permutations de $[\![1, n]\!]$.

On note $S \subset F$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On note $S_0 \subset S$ l'ensemble des permutations sans point fixe, et plus généralement, on note $S_k \subset S$ l'ensemble des permutations σ ayant exactement k points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que $\sigma(i) = i$ (autrement dit i est un point fixe de σ, il peut éventuellement y en avoir d'autres).

Quel est le cardinal de S ? Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$ justifier qu'il y a autant d'éléments dans $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ que de permutations de $([\![1, n]\!] \setminus \mathcal{I})$, et en déduire le cardinal de $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$, en fonction seulement de n et k.

Déduire de la partie 1 et de la question précédente le cardinal de S_0.

On note $q_{0,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S n'ait pas de point fixe. Montrer que $q_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et en déduire que $q_{0,n}$ converge vers p_0 lorsque $n \to \infty$.

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et que l'on note $T_{\mathcal{I}} \subset S$ est l'ensemble des permutations ayant pour points fixes les éléments de $\mathcal{I}$ (et seulement ceux-ci), quel est le cardinal de $T_{\mathcal{I}}$? (on pourra admettre qu'il y a autant de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{I}$ sans point fixe que de permutations de $\llbracket 1, n-k \rrbracket$ sans point fixe). En déduire le cardinal de S_k.

On note $q_{k,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S ait exactement k points fixes. Montrer que si $n \geqslant k$ alors $q_{k,n} = \frac{1}{k!} q_{0,n-k}$. En déduire que $q_{k,n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} p_k$.

Bonus : vitesse de convergence

Faire un développement asymptotique de $(1 - \frac{1}{n})^n$ avec un reste $o(\frac{1}{n})$. De la suite $(p_{0,n})$ ou $(q_{0,n})$, laquelle converge le plus vite vers p_0 ?