Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

MIDO - L3 Mathématiques Appliquées 2019-2020

Notions fondamentales de L1–L2

Examen du 28 octobre 2019 (durée 2h).

NOM : FROUVELLE

PRÉNOM : AMIC

(lisiblement)

Toutes les réponses sont à faire sur les deux copies d'énoncés.

Il y a largement la place de répondre dans les cases, n'utilisez le dos des copies qu'en cas d'extrême nécessité.

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
- écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
- pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
- donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.

Pour tout cela, ne pas hésiter à utiliser le brouillon à bon escient !

Les trois premiers exercices compteront pour environ un tiers de la note, le problème comptant pour le reste.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{nx})$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.
Indication : « deviner » l'expression de f sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, puis étudier les variations de $f_n - f$ sur $\mathbb{R}_-$ et R_+.

On pose $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = f_n - F$

Sur $]-\infty, 0[$, g_n est dérivable et $g_n'(x) = \frac{ne^{nx}}{n(1+e^{nx})} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} \geq 0$.

Sur $]0,+\infty[$ ———— $g_n'(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} - 1 = \frac{-1}{1+e^{nx}} \leq 0$.

La fonction f_n est C^1 par composition, et F est continue.

Donc g_n est continue, croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g_n(x) \leq g_n(0) = \frac{\ln(2)}{n}$.

D'autre part $g_n > 0$ sur $\mathbb{R}$: si $x \leq 0$, $1+e^{nx} > 1$ donc $\ln(1+e^{nx}) > 0$

si $x \geq 0$ $1+e^{nx} > e^{nx}$

donc $\ln(1+e^{nx}) > nx$

donc $\frac{1}{n}\ln(1+e^{nx}) - x > 0$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - F(x)|$

$= \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \leq \frac{\ln(2)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc (F_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, qui n'est pas dérivable en 0, donc pas C^1.

PARTIE
À
RABATTRE

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. Si A est un sous-ensemble de F, on note $g_{|A}$ la restriction de g à A : l'application de A dans G telle que pour tout x dans A, $g_{|A}(x) = g(x)$.

Montrer que ($g \circ f$ injective) $\Leftrightarrow$ (f injective et $g_{|f(E)}$ injective).

($\Rightarrow$) Si $g \circ f$ injective.
Soit $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$ et donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. Donc f injective.
Soit maintenant $y, y' \in f(E)$ tq $g_{|f(E)}(y) = g_{|f(E)}(y')$ (i.e. $g(y) = g(y')$). On peut prendre x, x' dans E tq $y = f(x)$, $y' = f(x')$.
Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Donc par injectivité de $g \circ f$, $x = x'$, puis $y = f(x) = f(x') = y'$. Donc $g_{|f(E)}$ est injective.
($\Leftarrow$) Si f et $g_{|f(E)}$ sont injectives. Soit $x, x' \in E$ tq $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, alors en posant $y = f(x)$, $y' = f(x')$. On a $y, y' \in f(E)$ et $g(y) = g(y')$. Par injectivité de $g_{|f(E)}$ on obtient $y = y'$. Donc $f(x) = f(x')$ et par injectivité de f on obtient $x = x'$. Donc $g \circ f$ injective

Montrer sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Calculer la trace de A et le rang de $A - 7I_3$. En déduire les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés, sans calculer le polynôme caractéristique.

A est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (en base orthonormale ...). $\boxed{\mathrm{Tr}\, A = -2+6-2 = 2}$.

$A - 7I_3 = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 9 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ est de rang 1 : colonnes toutes proportionnelles à $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\dim \mathrm{Ker}(A - 7I_3) = 2$ (th du rang).
7 est donc valeur propre double : A est semblable à $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Comme la trace ne dépend pas de la base, $\mathrm{Tr}(A) = 14 + \lambda$ $(= 2)$.
Donc $\lambda = -12$ est l'autre valeur propre, simple.
donc $\dim(\mathrm{Ker}(A + 12I_3)) = 1$

Problème : points fixes de fonctions aléatoires.

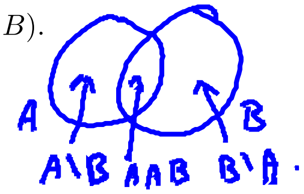
Les questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes, on peut admettre certains résultats pour passer à la suite (et il est recommandé de tout lire, les questions suivantes pouvant donner un moyen de vérifier ses réponses). Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Dans tout ce problème, on note $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$ ayant exactement k éléments.

Partie 1 : formule du crible (généralisée).

Soit E un ensemble et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes parties A et B de E disjointes (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$), on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.



$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

donc $f(A \cup B) = f(A) + f(B \setminus A)$.

$B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ et $(B \cap A) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Donc $f(B) = f(B \setminus A) + f(A \cap B)$.

Puis $f(B \setminus A) = f(B) - f(A \cap B)$.

Donc $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

~~Montrer~~ que pour $k \geqslant 1$, $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n+1\rrbracket)$ est l'union disjointe de $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)$ et de $\{\mathcal{I} \cup \{n+1\}, \mathcal{I} \in \mathcal{P}_{k-1}(\llbracket 1,n\rrbracket)\}$.

En remarquant

$Q_{k,n} =$

En déduire que si $(A_i)_{i\in\llbracket 1,n\rrbracket}$ sont des parties de E, alors $f\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum\limits_{\mathcal{I}\in\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)} f\Big(\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i\Big)$.

Par récurrence sur n : $f(A_1 \cup A_2) = \underbrace{f(A_1) + f(A_2)}_{k=1} - \underbrace{f(A_1 \cap A_2)}_{I=\{1,2\},\ k=2}$.

Si c'est vrai au rang n :

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = f\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cup A_{n+1}\Big) = f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + f(A_{n+1}) - f\Big(\underbrace{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap A_{n+1}}_{= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in P_k(\llbracket 1,n\rrbracket)} f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) + f(A_{n+1}) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\in P_k(\llbracket 1,n\rrbracket)} f\Big(\bigcap_{i\in I} (A_i \cap A_{n+1})\Big)}$$

$$= -\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \sum_{I \in P_{k-1}(\llbracket 1,n\rrbracket)} f\Big(\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cap A_{n+1}\Big)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{J \in Q_{k,n}} f\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big)$$

$$= \sum_{I\in P_1(\llbracket 1,n\rrbracket),\ I=\{i\}} f(A_i) + f(A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\in P_k(\llbracket 1,n+1\rrbracket)} f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) + (-1)^n f\Big(\bigcap_{i\in\llbracket 1,n+1\rrbracket} A_i\Big).$$

On retrouve exactement les termes voulus au rang $n+1$.

NOM : FROUVELLE

PRÉNOM : AMIC

(lisiblement)

Partie 2 : fonctions arbitraires de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

On note F l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On note $F_0 \subset F$ l'ensemble des applications φ n'ayant aucun point fixe (c'est à dire d'indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\varphi(i) = i$). Et plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, on note $F_k \subset F$ l'ensemble des applications φ ayant exactement k points fixes.

Quel est le cardinal de F ? Quel est le cardinal de F_0 ? On note $p_{0,n}$ la probabilité qu'une fonction tirée uniformément au hasard dans F soit dans F_0. Que vaut $p_{0,n}$?

$\mathrm{Card}(F) = n^n$. Se donner une fonction φ dans F_0 correspond à choisir $\varphi(1) \neq 1$ ($(n-1)$ choix), puis $\varphi(2) \neq 2$ sans autre contrainte, ($(n-1)$ choix), ... puis $\varphi(n) \neq n$. Au total $(n-1)^n$ choix.

Donc $\mathrm{Card}(F_0) = (n-1)^n$ et $p_{0,n} = \dfrac{\mathrm{card}(F_0)}{\mathrm{card}\, F} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

Calculer la limite de $(1-\frac{1}{n})^n$ lorsque $n \to \infty$ (penser à utiliser ln). En déduire la limite de $p_{0,n}$ lorsque $n \to \infty$, notée p_0.

$\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -1$ lorsque $n \to \infty$ $\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Donc $\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$. On compose par exp. (continue).

donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}}$. $\boxed{p_{0,n}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \boxed{e^{-1} = p_0}$

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$ et si l'on note $G_{\mathcal{I}} \subset F$ l'ensemble des fonctions ayant pour points fixes les éléments de $\mathcal{I}$ (et seulement ceux-ci), quel est le cardinal de $G_{\mathcal{I}}$? En déduire le cardinal de F_k.

Une fonction $\sigma \in G_{\mathcal{I}}$ est déterminée par les valeurs de $\varphi(i)$ $(\neq i)$ pour les $i \notin \mathcal{I}$ (puisque $\varphi(i) = i$ si $i \in \mathcal{I}$). Pour chaque $i \notin \mathcal{I}$, il y a $(n-1)$ possibilités. Donc au total $(n-1)^{n-k}$ possibilités. $\boxed{\mathrm{Card}\, G_{\mathcal{I}} = (n-1)^{n-k}}$

$F_k = \bigcup_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} G_{\mathcal{I}}$ et l'union est disjointe. Donc $\boxed{\mathrm{Card}\, F_k = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} (n-1)^{n-k} = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}$

On note $p_{k,n}$ la probabilité qu'une fonction tirée uniformément au hasard dans F ait exactement k points fixes. Montrer que $p_{k,n} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(1-\frac{1}{n})^{n-k}$, et calculer la limite de $p_{k,n}$ lorsque $n \to \infty$, notée p_k (on pourra calculer la limite de $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$ lorsque $n \to \infty$).

On a $p_{k,n} = \dfrac{\mathrm{Card}(F_k)}{\mathrm{Card}(F)} = \binom{n}{k}\dfrac{(n-1)^{n-k}}{n^n} = \binom{n}{k}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k}\dfrac{1}{n^k} = \underline{\binom{n}{k}\dfrac{1}{n^k}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-k}}$.

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\, n^k}}_{\to 1/k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \text{ si } n \to \infty \text{ (à } k \text{ fixé).}$$

(polynômes de degré k en n au num. et dénom., coeff dominants 1 et $k!$).

Donc $p_{k,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{e^{-1}}{k!} = p_k$.

PARTIE

À

RABATTRE

Montrer que $\sum_{k\geqslant 0} p_k = 1$. Quel est le nom de la loi d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X=k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?

$\sum_{k\geqslant 0} p_k = \sum_{k\geqslant 0} \frac{e^{-1}}{k!} = e^{-1} \times e^{1} = 1.$

C'est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$

Partie 3 : permutations de $[\![1,n]\!]$.

On note $S \subset F$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note $S_0 \subset S$ l'ensemble des permutations sans point fixe, et plus généralement, on note $S_k \subset S$ l'ensemble des permutations σ ayant exactement k points fixes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i l'ensemble des permutations σ de $[\![1,n]\!]$ telles que $\sigma(i) = i$ (autrement dit i est un point fixe de σ, il peut éventuellement y en avoir d'autres).

Quel est le cardinal de S ? Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$ justifier qu'il y a autant d'éléments dans $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ que de permutations de $([\![1,n]\!] \setminus \mathcal{I})$, et en déduire le cardinal de $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$, en fonction seulement de k.

$\boxed{\text{Card } S = n!}$. Si $\sigma \in \bigcap_{i\in I} A_i$ alors $\sigma(i) = i$ $\forall i \in I$, donc $\sigma(I) = I$ et par injectivité $\sigma(i) \notin I$ si $i \notin I$. Donc $\sigma|_{[\![1,n]\!]\setminus I}$ est injective à valeurs dans $[\![1,n]\!]\setminus I$, c'en est donc une permutation. Réciproquement si $\tilde{\sigma}$ est une permutation de $[\![1,n]\!]\setminus I$, on peut poser $\tilde{\sigma}(i) = i$ pour $i \in I$ et on obtient bien $\tilde{\sigma}$ permutation de $[\![1,n]\!]$ dans $\bigcap_{i\in I} A_i$. Donc $\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = (n-k)!$

Déduire de la partie 1 et de la question précédente le cardinal de S_0.

$S\setminus S_0$: permutations avec au moins 1 pt fixe. Dans $S\setminus S_0 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Donc $\text{Card}(S\setminus S_0) = n! - \text{card } S_0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\in\mathcal{P}_k[\![1,n]\!]} \underbrace{\text{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)}_{=(n-k)!}$

(on prend $E = S$, $f = \text{Card}$ pour appliquer la partie 1).

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right)$. Donc $\boxed{\text{Card } S_0 = n! + n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$

$= n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right).$

On note $q_{0,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S n'ait pas de point fixe. Montrer que $q_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et en déduire que $q_{0,n}$ converge vers p_0 lorsque $n \to \infty$.

$q_{0,n} = \frac{\text{Card}(S_0)}{\text{Card}(S)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Comme cette série converge vers $\exp(-1) = p_0$

On a donc $\underline{q_{0,n} \to p_0}$.

Si $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et que l'on note $T_{\mathcal{I}} \subset S$ est l'ensemble des permutations ayant pour points fixes les éléments de $\mathcal{I}$ (et seulement ceux-ci), quel est le cardinal de $T_{\mathcal{I}}$? En déduire le cardinal de S_k.

Si $\sigma \in T_I$, alors $\sigma(i) = i \ \forall i \in I$ et $\sigma|_{\llbracket 1,n \rrbracket \setminus I}$ est une permutation de $\llbracket 1,n \rrbracket \setminus I$ sans pt fixe. Réciproquement si $\tilde{\sigma}$ est une permutation sans pt fixe de $\llbracket 1,n \rrbracket \setminus I$, en posant $\tilde{\sigma}(i) = i \ \forall i \in I$ cela donne une permutation $\tilde{\sigma} \in T_I$.

Donc $\mathrm{Card}(T_I) = \mathrm{Card}(\{\text{permutations de } \llbracket 1,n \rrbracket \setminus I \text{ sans pt fixe}\})$.

$= \mathrm{Card}(\{\text{permutations de } \llbracket 1,n-k \rrbracket \text{ sans pt fixe}\})$

$= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

$S_k = \bigcup_{I \in P_k(\llbracket 1,n \rrbracket)} T_I$ (disjointe) donc $\boxed{\mathrm{Card}\, S_k = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \times (n-k)!}$

On note $q_{k,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S ait exactement k points fixes. Montrer que si $n \geqslant k$ alors $q_{k,n} = \frac{1}{k!} q_{0,n-k}$. En déduire que $q_{k,n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} p_k$.

$$q_{k,n} = \frac{\mathrm{Card}(S_k)}{\mathrm{Card}\, S} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} (n-k)! = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{k!} q_{0,n-k}.$$

Donc $q_{k,n} \to \frac{1}{k!} p_0 = p_k$.

Bonus : vitesse de convergence

Faire un développement asymptotique de $(1 - \frac{1}{n})^n$ avec un reste $o(\frac{1}{n})$. De la suite $(p_{0,n})$ ou $(q_{0,n})$, laquelle converge le plus vite vers p_0 ?

$$\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -1 - \frac{1}{2n} + o(n)$$

Donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{\left(-1 - \frac{1}{2n} + o(n)\right)} = e^{-1} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2n} + o(n)\right)} = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{2n} + o(n)\right)$

$= e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2n} + o(n)$

Donc $|p_{0,n} - p_0| = \left|-\frac{e^{-1}}{2n} + o(n)\right| \sim \boxed{\frac{e^{-1}}{2n}}$

Puis (critère des séries alternées) $q_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ $\quad q_{0,n} \leq e^{-1} \leq q_{0,n+1}$ si n impair
$q_{0,n} \geq e^{-1} \geq q_{0,n+1}$ si n pair.

Donc $\boxed{|q_{0,n} - e^{-1}| \leq \frac{1}{n!}}$.

$(q_{0,n})$ converge BEAUCOUP plus rapidement.