Notions fondamentales de L1–L2
Contrôle continu du 3 octobre 2019 (durée 1h).

Nom :	Prénom :	Note attendue : A B C

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
— donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.
Pour tout cela, ne pas hésiter à bien utiliser le brouillon !

Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications

Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), montrer que f est injective (resp. g est surjective).

Si $g\circ f$ injective : Soit x, y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$
Et par injectivité de $g\circ f$, $x = y$. Donc f injective.

Si $g\circ f$ surjective : Soit y dans G. On peut donc prendre x dans E tel que $g\circ f(x) = y$. Donc pour $z = f(x)$ (dans F) on a $g(z) = y$. Donc f surjective.

En déduire que f, g et h sont toutes les trois bijectives si et seulement si $g \circ f$ et $h \circ g$ le sont.

($\Rightarrow$) La composée de fonctions bijectives est bijective.

($\Leftarrow$) Si $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives, alors
| $g\circ f$ est surj. donc g aussi.
| $h\circ g$ est inj. donc g aussi.

Donc g bijective et
| $f = g^{-1}\circ(g\circ f)$ aussi
| $h = (h\circ g)\circ g^{-1}$ aussi
par composition.

Soit $P = 3X^5 + 10X^3 + 15X + a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Calculer P' et en déduire que P admet toujours 5 racines simples (dans $\mathbb{C}$).

$P' = 15x^4 + 30x^2 + 15 = 15(x^2+1)^2 = 15(x-i)^2(x+i)^2$.

$P(i) = 8i + a \neq 0$ (a réel), de même $P(-i) = -8i + a \neq 0$ donc P n'a pas de racine commune avec P', et n'a donc que des racines simples. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, il en a exactement 5.

Calculer la limite de $\frac{1}{\arctan(x)^2} - \frac{1}{\tan(x)^2}$ lorsque $x \to 0$.

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $\left(\text{primitiver } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)\right)$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $\left(\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}, \dots \right.$ ou calcul de $\tan'(0), \tan''(0), \left.\tan'''(0)\right)$

$$\frac{1}{\arctan(x)^2} - \frac{1}{\tan(x)^2} = \frac{(\tan x - \arctan x)(\tan x + \arctan x)}{\tan(x)^2 \arctan(x)^2}$$

$$\sim \frac{\left(\frac{2x^3}{3}\right) \times 2x}{x^4} = \frac{4}{3}.$$

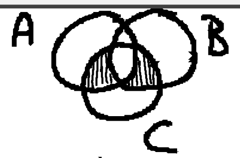
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses sous-espaces propres. Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

Cf. corrigé du CC 2018. Il y avait plus de place cette année !

Problème : différence symétrique.

Pour des parties A et B d'un ensemble E, on note $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (on rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$, où ^{c} désigne le complémentaire dans E).

Montrer que si A, B et C sont des parties de E, alors $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

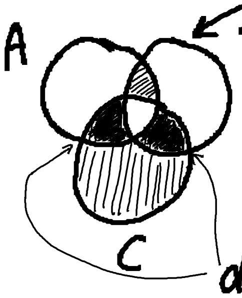


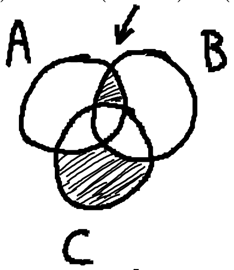
$$(A\cap C)\Delta(B\cap C) = [(A\cap C)\cap(B\cap C)^c] \cup [(B\cap C)\cap(A\cap C)^c]$$

$$= (A\cap C\cap B^c) \cup \underbrace{(A\cap C\cap C^c)}_{\emptyset} \cup (B\cap C\cap A^c) \cup \underbrace{(B\cap C\cap C^c)}_{\emptyset}$$

$$= [(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap C = (A\Delta B)\cap C.$$

A-t-on également $(A \cap B)\Delta C = (A\Delta C) \cap (B\Delta C)$?





NON. Prendre par ex $E \neq \emptyset$ et $A = C = E$, $B = \emptyset$.

$(A\cap B)\Delta C = \emptyset \Delta C = C = E$

$(A\Delta C)\cap(B\Delta C) = \emptyset \cap E = \emptyset$.

dès qu'un de ces deux sous-ensembles est non vide $(A\cap C\cap B^c$ ou $B\cap C\cap A^c)$, on a un contrexemple.

Montrer que si A, B et C sont des parties de E, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

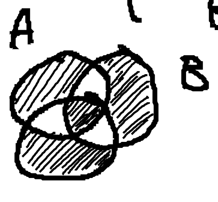
$$(A\Delta B)\Delta C = \big([(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]\cap C^c\big) \cup [(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)]^c\cap C.$$

Tout développer en gardant $\cup(\cap)\ldots$

$$= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup[(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)\cap C]$$

(car $A\cap A^c = \emptyset$, $B\cap B^c = \emptyset$)

$$= (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C).$$



Cette expression est symétrique en A et C,

donc $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A = A\Delta(B\Delta C)$.

Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des sous parties de E. On peut donc écrire d'après la question précédente $A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_n$ sans se soucier de l'ordre des parenthèses. Pour $x \in E$, on note $\mathcal{I}_x = \{i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\}$ l'ensemble des indices des ensembles contenant x. Montrer que $x \in A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_n$ si et seulement si le cardinal de I_x est impair.

Par récurrence sur n. $n=1$ OK : $x \in A_1 \iff I_x = \{1\}$.

Si c'est vrai au rang n : (On note I_x^n et I_x^{n+1} pour éviter les ambiguïtés)

$$x \in A_1\Delta\ldots\Delta A_{n+1} \iff \begin{array}{l} x\in A_{n+1} \text{ et } x\notin A_1\Delta\ldots\Delta A_n \\ \text{ou} \\ x\notin A_{n+1} \text{ et } x\in A_1\Delta\ldots\Delta A_n \end{array}$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} n+1\in I_x^{n+1} \text{ et } \operatorname{card}(I_x^n) \text{ pair } \quad (\text{ici } I_x^{n+1} = I_x^n \cup\{n+1\}) \\ \text{ou} \\ n+1\notin I_x^{n+1} \text{ et } \operatorname{card}(I_x^n) \text{ impair } \quad (\text{ici } I_x^{n+1} = I_x^n) \end{array}\right.$$

$$\iff \operatorname{card}(I_x^{n+1}) \text{ impair (dans les deux cas)}.$$