Notions fondamentales de L1–L2
Contrôle continu du 26 septembre 2018.

Nom :	Prénom :	Note attendue : A B C

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
— donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.
Pour tout cela, ne pas hésiter à bien utiliser le brouillon !

Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application, et A et B des parties de E.

Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Si f n'est pas injective, montrer qu'il existe deux ensembles A_1 et A_2 tels que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Si f est injective, montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Calculer $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable (faire « disparaître » les $\sqrt{x}$).

On note E l'ensemble suivant (appelé « ensemble des fonctions C^∞ à croissance au plus polynômiale ») :

$$E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| \geqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant C|x|^\alpha)\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel contenant l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ (on traitera à part les cas où $e^{ix} = 1$).

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses sous-espaces propres. Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

Problème : plus grande racine d'un polynôme et suite récurrente.

On se donne $r > 2$ et on s'intéresse au polynôme $P = X^3 - rX^2 + 1$.

Q1. Montrer que P a trois racines réelles distinctes (notées $a < b < \lambda$), et que l'on a $-1 < a < 0 < b < 1$, puis que $r - 1 < \lambda < r$. Montrer enfin que l'on a $|a| < |b| < 1$.

Q2. On veut étudier le comportement asymptotique de λ (vue comme une fonction de r, on notera $\lambda(r)$ pour insister sur cette dépendance) lorsque $r \to +\infty$. En exprimant $\lambda(r)$ en fonction de r et $\lambda(r)^2$, montrer que $\lambda(r) = r + O(\frac{1}{r^2})$ lorsque $r \to +\infty$, puis que $\lambda(r) = r - \frac{1}{r^2} + O(\frac{1}{r^5})$ lorsque $r \to +\infty$.
Déterminer un développement de $\lambda(r)$ avec un reste d'ordre $O(\frac{1}{r^8})$ lorsque $r \to +\infty$.

Q3. On cherche à résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + \lambda z = 1, \\ a^2x + b^2y + \lambda^2 z = 1. \end{cases}$ Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & t \\ a^2 & b^2 & t^2 \end{vmatrix}$.
Montrer que $t \mapsto V(t)$ est un polynôme, calculer son coefficient dominant et déterminer sans calcul deux racines évidentes. En déduire la valeur de $V(\lambda)$, et montrer que $V(\lambda) \neq 0$.
En déduire que le système à résoudre admet une unique solution, notée (x, y, z) dans la suite.

Q4. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = r\, u_{n+2} - u_n. \end{cases}$
Montrer par une récurrence triple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = x\, a^n + y\, b^n + z\, \lambda^n$.

Q5. Montrer par une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
En déduire, d'après le comportement de u_n lorsque $n \to \infty$, que $z \neq 0$, puis que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

Q6. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| \leqslant \frac{C}{\lambda^n}$.

Bonus : Dans quel cas peut-on dire qu'une telle méthode pour approximer λ est plus efficace que la méthode de dichotomie ? Quelle autre méthode pourrait être utilisée, avec quels avantages et inconvénients ?