Notez que malgré ma mauvaise écriture, je me suis appliqué pour écrire proprement mon nom, histoire de ne pas mettre le correcteur en rogne dès la première ligne...

(Saviez-vous que les majuscules étaient plus lisibles que les minuscules ? Étonnant !).

Notions fondamentales de L1–L2

Contrôle continu du 26 septembre 2018.

Nom : FROUVELLE	Prénom : Amic	Note attendue : A B C

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
— donnez des arguments clairs s'enchaînant dans une structure logique parfaitement compréhensible.
Pour tout cela, ne pas hésiter à bien utiliser le brouillon !

Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application, et A et B des parties de E.

Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Soit $y \in f(A\cap B)$. Il existe $x \in A\cap B$ tel que $f(x) = y$. Un tel x est dans A et dans B, donc y $(= f(x))$ est dans $f(A)$ et dans $f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

Donc $\underline{f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)}$

Oh, un résultat mis en valeur ! cela met le correcteur de bonne humeur

Si f n'est pas injective, montrer qu'il existe deux ensembles A_1 et A_2 tels que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

On peut utiliser l'énoncé !

Dans ce cas on peut prendre x_1 et x_2 dans E avec $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.
On pose $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$. $f(A_1) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = f(A_2)$

Donc $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \underline{\neq \emptyset}$ et $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) \underline{= \emptyset}$.

Si f est injective, montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Soit y dans $f(A) \cap f(B)$. On prend x_A dans A et x_B dans B tels que $y = f(x_A)$ et $y = f(x_B)$. Comme $f(x_A) = f(x_B)$, par injectivité $\underset{\underset{A}{\cap}}{x_A} = \underset{\underset{B}{\cap}}{x_B} \in A\cap B$.

ceci n'est pas interdit. cela aide même.

Donc y $(= f(x_A)) \in f(A\cap B)$.

Donc $\underline{f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)}$

Calculer $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$ à l'aide d'un changement de variable (faire « disparaître » les $\sqrt{x}$).

Tiens une hypothèse raisonnable...

On pose $u = \sqrt{x}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\underline{\mathcal{C}^1 \text{ sur } [1,9]}$. $x = u^2$, "$dx = 2u\, du$".

$$\int_1^9 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{9}} \frac{u \times 2u\, du}{1+u} = 2\int_1^3 \frac{u^2}{1+u}\, du = 2\int_1^3 \frac{(u+1)(u-1)+1}{1+u}\, du$$

$$= 2\int_1^3 \left[(u-1) + \frac{1}{1+u}\right] du = \left[(u-1)^2 + 2\ln(1+u)\right]_1^3 = 4 + 2\ln 4 - \underbrace{2\ln 2}_{=\ln 4}$$

$$= \underline{4 + \ln 4}.$$

le brouillon est très utile pour ne pas faire 10 lignes de calculs avant d'arriver à ça...

Autre astuce facilitant la décomposition (qui devient gratuite)

poser $u = 1 + \sqrt{x}$.

(ou $t = 1+u$ après $\displaystyle\int_1^3 \frac{2u^2\, du}{1+u}$ ...).

On note E l'ensemble suivant (appelé « ensemble des fonctions C^∞ à croissance au plus polynômiale ») :

$$E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| \geqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant C|x|^\alpha)\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel contenant l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$.

Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

- $0 \in E$ ($C=1$ et $\alpha=1$ conviennent dans la définition).
- Si $f \in E$ (avec C_1 et α_1 dans la définition) et $g \in E$ (avec C_2 et α_2), et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

pour $|x| \geqslant 1$, on a $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| C_1 |x|^{\alpha_1} + |\mu| C_2 |x|^{\alpha_2}$

$\leq (|\lambda| C_1 + |\mu| C_2)|x|^\alpha$ avec $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) > 0$

(en effet $|x| \geqslant 1$ donc $|x|^\alpha \geqslant |x|^{\alpha_1}$ et $|x|^\alpha \geqslant |x|^{\alpha_2}$).

Donc $\lambda f + \mu g \in E$ (avec $C = |\lambda| C_1 + |\mu| C_2$ dans la définition).

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est dans E (avec $C=1$, $\alpha = n$ dans la définition).

E étant un espace vectoriel, par combinaisons linéaires il contient toutes les fonctions polynômiales.

Personne, ni même le correcteur, n'a remarqué que certains cas donnaient $C=0$ ou $\alpha=0$, mais ce n'est pas grave : si $C=0$ ou $\alpha=0$ marche alors $C=1$ aussi! $\alpha=1$

Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ (on traitera à part les cas où $e^{ix} = 1$).

$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\right)$. Si $e^{ix} = 1$, $e^{ikx} = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = n$.

Si $e^{ix} \neq 1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix\frac{n}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\left(x\frac{n}{2} - \frac{x}{2}\right)} \frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{n-1}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

ou $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_2|^2}$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \cos\frac{n-1}{2}x \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}$.

$\boxed{\text{Remarquer } \underset{x \to 0}{\sim} n}$! utile pour vérifier les calculs.

Ce qui donnait $\dfrac{1 - \cos x - \cos nx + \cos(n-1)x}{2 - 2\cos x}$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses sous-espaces propres. Calculer $Aw - 2w$ et en déduire que A est semblable à B.

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(A - 1 \cdot I_3)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2 \cdot I_3)$ ses sous-espaces propres.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On voit que $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

$A - I_3$ étant de rang $\geqslant 2$ (2 colonnes indép.) on a $\dim E_1 = 1$. Donc $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \mathrm{Vect}(u)$

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (idem), $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v} \in E_2$ donc $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \mathrm{Vect}(v)$

$Aw - 2w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$

On a donc $Au = u$, $Av = 2v$, $Aw = 2w + v$.

La matrice de $x \mapsto Ax$ dans la base (u, v, w) est donc $\begin{array}{cc} \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \end{array}$ c'est à dire B.

Donc $\boxed{A \text{ semblable à } B}$.

OK c'est un peu serré. Mais ça rentre! Utiliser le brouillon, ou au pire des cases de questions non répondues...

oui, on peut raturer ou corriger, il suffit de rester propre.

Problème : plus grande racine d'un polynôme et suite récurrente.

On se donne $r > 2$ et on s'intéresse au polynôme $P = X^3 - rX^2 + 1$.

Q1. Montrer que P a trois racines réelles distinctes (notées $a < b < \lambda$), et que l'on a $-1 < a < 0 < b < 1$, puis que $r - 1 < \lambda < r$. Montrer enfin que l'on a $|a| < |b| < 1$. Ne pas se lancer tout de suite dans le tableau de variation ! Le faire au brouillon...

$P(-1) = -r < 0$. $P(0) = 1 > 0$. $P(1) = 2 - r < 0$. $P(r) = 1 > 0$. P étant continu sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il admet trois racines a, b, λ respectivement dans $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,r[$. On a donc $\underline{-1 < a < 0 < b < 1 < \lambda < r}$.

P étant de degré 3, on a donc $P = (X-a)(X-b)(X-\lambda)$. Donc $a + b + \lambda = r$ (coeff de X^2).

Donc $0 < r - \lambda = a + b < 0 + 1 = 1$

Ceci donne $\underline{r - 1 < \lambda}$ et $\underline{|a| = -a < b = |b|}$ (< 1).

On pouvait aussi calculer $P(r-1) = r(2-r) < 0$ et $P(-a)$ ou $P(-b)$. (pour $b \in]-a, 1[$ ou $a \in]-b, 0[$)

Q2. On veut étudier le comportement asymptotique de λ (vue comme une fonction de r, on notera $\lambda(r)$ pour insister sur cette dépendance) lorsque $r \to +\infty$. En exprimant $\lambda(r)$ en fonction de r et $\lambda(r)^2$, montrer que $\lambda(r) = r + O(\frac{1}{r^2})$ lorsque $r \to +\infty$, puis que $\lambda(r) = r - \frac{1}{r^2} + O(\frac{1}{r^5})$ lorsque $r \to +\infty$.
Déterminer un développement de $\lambda(r)$ avec un reste d'ordre $O(\frac{1}{r^8})$ lorsque $r \to +\infty$.

On a $(\lambda(r) - r)\lambda(r)^2 + 1 = 0$ Donc $\boxed{\lambda(r) - r = -\frac{1}{\lambda(r)^2}}$

Comme $\lambda(r) \in]r-1, r[$, $\lambda(r) \underset{r\to\infty}{\sim} r$. En particulier $\frac{1}{\lambda(r)^2} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$.

Donc $\underline{\lambda(r) = r + O\left(\frac{1}{r^2}\right)}$. Puis $\frac{1}{\lambda(r)^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{1 + O(\frac{1}{r^3})}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)$

$= r\left(1 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)$ $\qquad = \frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^5}\right)$

Donc $\boxed{\lambda(r) = r - \frac{1}{\lambda(r)^2} = r - \frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^5}\right)}$

$= r\left(1 - \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^6}\right)\right)$.

Donc $\frac{1}{\lambda(r)^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^6}\right)\right)^{-2} = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^6}\right)\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^8}\right)$

Donc $\boxed{\lambda(r) = r - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^8}\right)}$

Q3. On cherche à résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + \lambda z = 1, \\ a^2x + b^2y + \lambda^2 z = 1. \end{cases}$ Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & t \\ a^2 & b^2 & t^2 \end{vmatrix}$. ne pas hésiter à dessiner sur le sujet ! On comprend mieux

Montrer que $t \mapsto V(t)$ est un polynôme, calculer son coefficient dominant et déterminer sans calcul deux racines évidentes. En déduire la valeur de $V(\lambda)$, et montrer que $V(\lambda) \neq 0$. C'est écrit, il doit bien y avoir un argument...
En déduire que le système à résoudre admet une unique solution, notée (x, y, z) dans la suite.

Dernière colonne : $V(t) = t^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} + (-1) \times t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ polynôme de degré 2 : coeff dominant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0$.

Si $t = a$ ou $t = b$: deux colonnes identiques donc $V(a) = V(b) = 0$.

Donc $V(t) = (b-a)(t-a)(t-b)$. Comme $\lambda > b > a$, λ n'est pas racine de V.

$\underline{V(\lambda) = (b-a)(\lambda-a)(\lambda-b) > 0}$. La matrice du système $\underline{\text{linéaire}}$ a un déterminant non-nul, elle est inversible et le système a donc $\underline{\text{une unique solution}}$

Q4. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = r\,u_{n+2} - u_n. \end{cases}$

Montrer par une récurrence triple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = x\,a^n + y\,b^n + z\,\lambda^n$. ⊛

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = 1 = x+y+z \\ U_1 = 1 = ax+by+\lambda z \\ U_2 = 1 = a^2x+b^2y+\lambda^2 z \end{array}\right\} \text{ par Q3.}$$

Supposons donc ⊛ aux rangs n, $n+1$ et $n+2$.

$$U_{n+3} = r\,U_{n+2} - U_n$$
$$= r\left(a^{n+2}x + b^{n+2}y + \lambda^{n+2}z\right) - a^n x - b^n y - \lambda^n z$$

$$U_{n+3} = x a^n \underbrace{(ra^2-1)}_{=a^3} + y b^n \underbrace{(rb^2-1)}_{=b^3} + z\lambda^n \underbrace{(r\lambda^2-1)}_{=\lambda^3}$$

car $P(a) = P(b) = P(\lambda) = 0$.

Donc $U_{n+3} = x\,a^{n+3} + y\,b^{n+3} + z\,\lambda^{n+3}$.

Par récurrence triple, ⊛ est donc vraie pour tout entier naturel n.

quelle astuce ! les deux colonnes sont bien lisibles !

Q5. Montrer par une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
En déduire, d'après le comportement de u_n lorsque $n \to \infty$, que $z \neq 0$, puis que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$.

On a $1 \leq \underset{=U_0}{1} \leq \underset{=U_1}{1} \leq \underset{=U_2}{1}$. Supposons $1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq U_{n+2}$. On a $1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2}$, il reste à montrer $U_{n+3} \geq U_{n+2}$. $U_{n+3} - U_{n+2} = rU_{n+2} - U_n - U_{n+2} = (r-1)U_{n+2} - U_n$
$\geq U_{n+2} - U_n \geq 0$ par hypothèse (car $r-1 \geq 1$, $U_{n+2} \geq 0$)

Donc on a bien $U_{n+3} \geq U_{n+2}$.

Par récurrence, on obtient donc que U_n est croissante.

Si $z = 0$, alors $U_n = x a^n + y b^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $|a| < 1$ et $|b| < 1$). Or $U_n \geq 1$.

Donc $z \neq 0$. Par comparaison, comme $\lambda > 1$ et $|a| < 1$, $|b| < 1$, $U_n \underset{n\to\infty}{\sim} z\lambda^n$

Donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{z\,\lambda^{n+1}}{z\,\lambda^n} = \lambda$. Donc $\boxed{\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda}$.

Q6. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| \leqslant \frac{C}{\lambda^n}$.

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n} - \lambda\right| = \left|\frac{x a^n(a-\lambda) + y b^n(b-\lambda) + z\lambda^n\overbrace{(\lambda-\lambda)}^{=0}}{x a^n + y b^n + z\lambda^n}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{|x a^n(a-\lambda) + y b^n(b-\lambda)|}{|z|\,\lambda^n}$$

Donc $\lambda^n \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n} - \lambda\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{|x a^n(a-\lambda) + y b^n(b-\lambda)|}{|z|}$, qui est bornée, (car $|a| < 1$, $|b| < 1$) donc $\left(\lambda^n\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n} - \lambda\right|\right)$ aussi.

Donc il existe $C > 0$ tq $\forall n$ $\lambda^n\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n} - \lambda\right| \leq C$.

Bonus : Dans quel cas peut-on dire qu'une telle méthode pour approximer λ est plus efficace que la méthode de dichotomie ? Quelle autre méthode pourrait être utilisée, avec quels avantages et inconvénients ?

Dichotomie : l'erreur est divisée par 2 à chaque étape. Erreur d'ordre $\dfrac{1}{2^n}$.
Ici : l'erreur est d'ordre $\leq \dfrac{C}{\lambda^n}$. Donc dès que $\lambda > 2$ la suite $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ converge vers λ plus rapidement.

Méthode de Newton. Ordre de convergence quadratique (α^{2^n} avec $\alpha < 1$), donc bien plus rapide lorsqu'elle converge. Inconvénient : convergence dépendant du pt initial. Il se peut qu'elle diverge.
En fait dans notre cas (avec des arguments de convexité), elle fonctionne toujours partant de $x_0 > \lambda$ (par exemple r), mais c'est une autre histoire...