

Nom :

Prénom :

Note attendue : A B C

Soient E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$.

Montrer que si $B \subset F$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$, et que l'inclusion est une égalité si f est surjective.

Montrer que si f n'est pas surjective, alors il existe $B_0 \subset F$ tel que $f(f^{-1}(B_0)) \neq B_0$.

Donner le rayon de convergence de la série $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$. Si $x \geq 0$, donner une expression simple de $f(x)$.

Montrer que pour $x \leq 0$, $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{-x}} + e^{\sqrt{-x}})$.

Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\Phi(P) = P(X+1) - P'(X)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et représenter sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$. Peut-on diagonaliser Φ ?