

Nom :

Prénom :

Note attendue : A B C

Soient  $E, F$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F$ .

Montrer que si  $B \subset F$ , alors  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ , et que l'inclusion est une égalité si  $f$  est surjective.

Montrer que si  $f$  n'est pas surjective, alors il existe  $B_0 \subset F$  tel que  $f(f^{-1}(B_0)) \neq B_0$ .

Donner le rayon de convergence de la série  $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$ . Si  $x \geq 0$ , donner une expression simple de  $f(x)$ .

Montrer que pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{-x}} + e^{\sqrt{-x}})$ .

Pour  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , on pose  $\Phi(P) = P(X+1) - P'(X)$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  et représenter sa matrice dans la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$ . Peut-on diagonaliser  $\Phi$  ?