Nom : Prénom : Note attendue : A B C

On note E l'ensemble des suites à termes strictement positifs.

On note $\asymp$ la relation suivante sur E : $u \asymp v$ si et seulement si il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout entier n, on ait $C_1 v_n \leqslant u_n \leqslant C_2 v_n$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur E.

Voici trois relations sur E : $u\mathcal{R}_1 v \Leftrightarrow u_n = O(v_n)$, $u\mathcal{R}_2 v \Leftrightarrow u_n = o(v_n)$ et $u\mathcal{R}_3 v \Leftrightarrow u_n \sim v_n$. Lesquelles (sans preuve) sont réflexives ? Symétriques ? Transitives ? Trouver des contrexemples pour celles qui ne le sont pas.

On pose $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Représenter sur un dessin une comparaison de cette somme avec une intégrale, puis démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. En déduire la limite de (u_n).

Soit $P = X^4 - 4X + 1$. Calculer P' et montrer que P a 4 racines simples (complexes)