Nom :	Prénom :	Note attendue : A B C

Soit E un ensemble et f et g des fonctions de E dans E.

(1) Supposons f injective et $f \circ g = f$. Montrer que $g = \mathrm{id}_E$.

(2) Supposons f surjective et $g \circ f = f$. Montrer que $g = \mathrm{id}_E$.

(3) Supposons que $f \circ g = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est surjective et g injective.

On suppose que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$, et que f est injective **ou** surjective.
Montrer que $g \circ f \circ f \circ g = \mathrm{id}_E$, et en déduire que g est bijective.

Montrer que $g \circ g = f \circ f$, en déduire la valeur de $f \circ f \circ f \circ f$, et en conclure que f est bijective.

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
On pourra utiliser (et démontrer) que pour tout x dans $]0,1]$, on a $0 < 1 - e^{-x} < x$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$.
Montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que la famille $(f^{n-k}(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

En déduire que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base, puis que $f^n = 0$, et exprimer la matrice de f dans cette base.