

Nom :

Prénom :

Note attendue : A B C

Soient E , F , et I des ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de E et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de F , montrer que $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ et $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

Factoriser $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, et décomposer $\frac{3X - 3}{X^3 + 1}$ en éléments simples (dans \mathbb{R}).

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{3x - 3}{x^3 + 1}$ sur $] -1, +\infty[$, et donner la valeur de $\int_0^1 \frac{3x - 3}{x^3 + 1} dx$.

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donner les définitions à l'aide de quantificateurs, de

- f est continue sur \mathbb{R} ,
- f est uniformément continue sur \mathbb{R} ,
- f n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Montrer que si l'on a une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels vérifiant $f(x_n + \frac{1}{n}) - f(x_n) \geq 1$ pour tout n dans \mathbb{N}^* , alors f n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Donner un exemple d'une fonction continue sur \mathbb{R} mais pas uniformément continue.

♣ Existe-t-il une fonction bornée, continue sur \mathbb{R} , mais pas uniformément continue ?