Notions Fondamentales L1–L2
Feuille d'exercices n° 2 (2017) — Éléments de correction.

2 Analyse réelle et un peu plus

2.1 Propriétés de $\mathbb{R}$, suites et séries réelles

Exercice 1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme (u_k) converge vers 0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant n_0$, alors $|u_k - 0| < \varepsilon$. Donc si $p = \max(n, n_0)$, on a $p \geqslant n_0$ donc $|u_p| < \varepsilon$, et d'autre part on a bien $p \geqslant n$.

La propriété signifie, en français, que « on peut trouver des valeurs absolues de la suite aussi proches de zéro que l'on veut, pour des indices aussi grands que l'on veut ». Sa négation est

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n, |u_p| \geqslant \varepsilon.$$

Remarque : la propriété énoncée correspond à la notion de valeur d'adhérence : on peut extraire une sous-suite qui converge vers 0. Plus généralement, la propriété $\forall \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, |u_p - \ell| < \varepsilon$ équivaut à dire que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (c'est à dire que l'on peut trouver φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

Exercice 2.

1. Il suffit de montrer par récurrence que $u_n \in [0, 4]$. En effet c'est bien le cas pour u_0, et on a que si $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, alors $4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 16$, et la fonction racine étant croissante et bien définie sur $\mathbb{R}_+$, on obtient que u_{n+1} est bien défini et que $\sqrt{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{16} = 4$, donc l'hérédité est satisfaite.
2. Par récurrence, on montre que (u_n) est croissante. En effet $u_0 = 0 \leqslant u_1 = 2$. Et si $u_n \leqslant u_{n+1}$ alors $3u_n + 4 \leqslant 3u_{n+1} + 4$, et par croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. La suite est donc croissante et majorée (par 4), elle a donc une limite ℓ qui satisfait (par continuité) $0 \leqslant \ell \leqslant 4$ et $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$. Donc $\ell^2 = 3\ell + 4$, ce qui donne $\ell = 4$ ou $\ell = -1$, mais comme $\ell \geqslant 0$, on obtient $\ell = 4$.

Exercice 3.

1. Par récurrence double. On a $u_0 = 0 = 3^0 - 2^0$, $u_1 = 1 = 3^1 - 2^1$. Si $u_n = 3^n - 2^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, on alors en utilisant $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$, on obtient

$$u_{n+2} = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) + 6(3^n - 2^n) = (5 \cdot 3 - 6)3^n - (2 \cdot 5 - 6)2^n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2},$$

   donc on a bien l'hérédité.

2. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: la suite nulle vérifie bien cela, et si u et v sont deux telles suites, alors $\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + av_{n+1} + bv_n = a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n)$, c'est-à-dire que l'on a $(\lambda u + v)_{n+2} = a(\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n$.

   L'application $E \to \mathbb{R}^2$ qui à u associe (u_1, u_0) est bijective (et évidemment linéaire). En effet si on a u_0 et u_1 dans $\mathbb{R}$, par récurrence double il existe une suite (construite de manière unique) telle que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Donc si $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ alors on a bien $\lambda^{n+2} = a\lambda^{n+1} + b\lambda^n$ donc $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Si λ_1 et λ_2 sont deux solutions distinctes, alors en notant $v = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la famille (v, w) est libre dans E. En effet si $\alpha v + \beta w = 0$ alors $\alpha + \beta = 0$ (pour $n = 0$, donc $\beta = -\alpha$) et $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$ (pour $n = 1$), soit $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ et donc $\alpha = 0$ comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, puis $\beta = 0$. Comme E est de dimension 2, (v, w) est une base de E, et toute suite u de E s'écrit sous la forme $\alpha_1 v + \alpha_2 w$, ce qui est le résultat voulu.

   On peut l'appliquer au résultat précédent : on a $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$, donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ conviennent. Donc $u_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$. Comme $u_0 = 0$, on obtient $\alpha + \beta = 0$. Et comme $u_1 = 1$, on obtient $1 = 3\alpha + 2\beta = 3\alpha - 2\alpha = \alpha = 1$, ce qui nous donne bien $u_n = 3^n - 2^n$.

3. (a) Attention, il faut remettre la suite dans le bon ordre pour être dans le cadre précédent, on a donc bien $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$. On résout $x^2 + x - 1 = 0$, on trouve deux solutions $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. On obtient $\lambda_1 < -1$ et $\lambda_2 \in]0, 1[$. Donc si on a $u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$ avec $\alpha_1 \neq 0$,

alors pour n assez grand le terme dominant est $\alpha_1\lambda_1^n$ et donc en prenant n pair ou impair assez grand suivant le signe de α_1, on obtient $u_n < 0$. Si la suite est à terme positifs, c'est que $u_n = \alpha_2\lambda_2^n$, et donc on obtient bien que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$ (puisque $\lambda_2 \in]0,1[$).

(b) La réponse est $\dots 321,000\dots$ pour le premier et $\dots 126,999\dots$ pour le second.

On obtient d'abord $u_n = (\frac{2}{\sqrt{5}-1})^n$. Pour conjecturer les trois chiffres après la virgule, calculer numériquement les premiers termes $\frac{1}{u_n}$ pour $n \geqslant 2$ pour voir qu'ils s'approchent d'une suite d'entiers v_n (alternativement par en-dessus et par en-dessous). On obtient $v_2, v_3, \dots = 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$. Essayer de conjecturer une relation de récurrence (simple) sur les entiers v_n. Une fois v_n définie par cette relation de récurrence (on doit trouver que $v_0 = 2$ et $v_1 = 1$ conviennent pour que la relation soit vérifiée pour tout n), calculer une expression explicite de v_n (d'après la question précédente), puis de $v_n - \frac{1}{u_n}$, et en déduire selon la parité de n les trois premiers chiffres après la virgule, dès que n est suffisamment grand (montrer que c'est bien le cas pour $n = 2017$ ou $n = 20^{17}$).

Pour calculer les trois premiers chiffres avant la virgule, on peut essayer de programmer la suite v_n, et si on a un langage qui accepte les entiers arbitrairement grands, on observe que v_{2017} est un entier à 422 chiffres qui se termine par 321. Attention à certains langages qui ne travaillent qu'avec des entiers bornés... Par contre, pour $n = 20^{17}$, on excède largement les capacités de calcul et de mémoire de tous les ordinateurs de la planète si on veut le calculer de la sorte...

Pour s'en sortir, regarder le chiffre des unités de v_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$ et observer que cela se répète de manière périodique (la période est 12). Le prouver. De même regarder les chiffres des dizaines et des unités de v_{12n} et voir que la période est 5. En conclure que les deux derniers chiffres devraient se répèter périodiquement (de période 60) et le prouver. Faire de même avec les trois derniers chiffres qui sont de période 300. On cherche donc q et $r < 300$ tels que 2017 (ou 20^{17}) s'écrit de la forme $300q + r$. Dans le premier cas, c'est simple, on fait la division euclidienne, et on trouve $2017 = 6 \times 300 + 217$, donc v_{2017} a les mêmes trois derniers chiffres que v_{217}. Pour 20^{17}, on peut soit le faire à la machine (attention, là encore ça peut dépasser les bornes des entiers de la machine, il faut être précautionneux) et trouver $r = 200$, soit voir que le reste de la division par 100 est 0 (donc le reste de r dans la division par 100 est aussi 0), donc $r = 0, 100$, ou 200. Il suffit donc de trouver le reste de la division par 3 de 20^{17} (r aura le même reste dans la division par 3). Comme $10 = 3 * 3 + 1$, alors le reste de 10^{17} dans la division par 3 est 1. Et comme $2^2 = 3 + 1$, le reste de $2^{17} = 2 \times (2^2)^8$ est 2. Donc le reste de r dans la division par 3 est 200.

On a donc besoin de calculer les trois derniers chiffres de v_{217} et v_{200}. On peut le faire à la machine si elle accepte les entiers arbitrairement grands, mais même sans cela, on peut à chaque étape ne garder que le reste dans la division par 1000, qui est seulement ce dont on a besoin. On obtient 321 pour v_{217} et 127 pour v_{200}, ce qui permet de trouver les résultats annoncés.

Exercice 4.

1. Montrons que v est croissante. Comme v_n est un minorant de $\{u_p, p \geqslant n\}$, alors c'est un minorant de $\{u_p, p \geqslant n+1\}$. Comme v_{n+1} est le plus grand de ces minorants, c'est donc que $v_{n+1} \geqslant v_n$. De même w est décroissante. Donc v admet une limite ℓ_1 dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on a $\ell_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. De même w admet une limite ℓ_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} w_n$. On remarque que $v_n \leqslant w_n$, donc à la limite on a bien $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

2. Dans ce cas, on a $u_n \geqslant -1$ pour tout n. Donc $v_n = \inf_{p\geqslant n} u_p \geqslant -1$ pour tout n. Montrons que $v_n = -1$ dans tous les cas. En effet pour $2k+1 \geqslant n$, on a $v_n \leqslant u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+2}$. Ceci étant valide pour k arbitrairement grand, on obtient $v_n \leqslant -1$. Donc v est constante et $\ell_1 = -1$.

   Pour ℓ_2, on observe que $w_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ si n est pair et $w_n = 1 + \frac{1}{n+2}$ si n est impair. En effet, montrons-le par exemple pour n impair. On a pour $p \geqslant n$, $u_p \leqslant 1$ si p est impair et $u_p = 1 + \frac{1}{p+1} \leqslant 1 + \frac{1}{n+2}$ si p est pair (car alors $p \geqslant n+1$, puisque p et n n'ont pas la même parité). Donc $w_n \leqslant 1 + \frac{1}{n+2}$. Mais $w_n \geqslant u_n = 1 + \frac{1}{n+2}$, et donc $w_n = 1 + \frac{1}{n+2}$. On fait de même dans le cas où n est pair, et on obtient donc que la limite de w est 1.

3. On va en fait d'abord montrer que pour $\ell \in \mathbb{R}$, le fait que $\ell_1 \geqslant \ell$ équivaut à ce que pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, on ait $u_n \geqslant \ell - \varepsilon$. En effet, comme v_n est croissante, le fait que sa limite ℓ_1 soit supérieure ou égale à ℓ équivaut à ce que pour tout ε, il existe n tel que $v_n \geqslant \ell - \varepsilon$. Et $v_n \geqslant \ell - \varepsilon \Leftrightarrow \forall p \geqslant n, u_p \geqslant \ell - \varepsilon$, car v_n est la borne inférieure des u_p pour $p \geqslant n$.

   On a donc de même que $\ell_2 \leqslant \ell$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

   Donc si la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ (vers ℓ), alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui nous donne que $\ell_2 \leqslant \ell \leqslant \ell_1$, et comme on avait déjà $\ell_1 \leqslant \ell_2$, on obtient $\ell = \ell_1 = \ell_2$. Si (u_n) converge vers $+\infty$, c'est donc que pour tout M, on a $u_n \geqslant M$ à partir d'un certain rang n_0, et alors $v_{n_0} \geqslant M$. Et on a donc $\ell_1 \geqslant M$. Comme ceci est vrai pour tout M, alors $\ell_1 = +\infty$, et comme $\ell_1 \leqslant \ell_2$, on obtient $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$. De même si (u_n) converge vers $-\infty$, on obtient que $\ell_2 = -\infty$ et que donc $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$.

Réciproquement, si $\ell_1 = \ell_2 \in \mathbb{R}$ (notons ℓ cette valeur commune), on obtient que $\ell_1 \geqslant \ell$ et $\ell_2 \leqslant \ell$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel $u_n \geqslant \ell - \varepsilon$ et un à partir duquel $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. En prenant le maximum de ces deux rangs, on obtient donc un rang à partir duquel $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Donc la suite converge bien vers ℓ. Si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors pour tout $M > 0$, il existe n tel que $v_{n_0} \geqslant M$ à partir d'un certain rang. Donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant M$. Ceci nous donne bien que u_n converge vers $+\infty$. On fait de même pour le cas $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$.

4. Si $u_{\varphi(n)} \to \ell$ avec φ strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors $v_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n)}$. Donc en passant à la limite, on obtient $\ell_1 \leqslant \ell$.

   Pour construire une suite extraite qui converge vers ℓ_1, dans le cas où $\ell_1 \in \mathbb{R}$, on suppose φ construite jusqu'au rang n avec $u_{\varphi(n)} \leqslant \ell_1 + \frac{1}{n+1}$ par exemple. Alors l'ensemble $A = \{p > \varphi(n), u_p \leqslant \ell_1 + \frac{1}{n+2}\}$ est non-vide, puisque sinon on aurait $u_p > \ell + \frac{1}{n+2}$ pour tout $p > \varphi(n)$, et donc $v_{\varphi(n)+1} \geqslant \ell_1 + \frac{1}{n+2}$ et donc à la limite $\ell_1 \geqslant \ell_1 + \frac{1}{n+2}$. On pose donc $\varphi(n+1)$ le plus petit élément de A et on a bien obtenu notre construction. On a donc une fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout n on ait $u_{\varphi(n)} \leqslant \ell_1 + \frac{1}{n+1}$. D'autre part on a $v_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n)}$, donc par encadrement, la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ_1. Dans le cas où $\ell_1 = +\infty$, on sait déjà par la question précédente que $u_n \to +\infty$, donc il suffit de prendre $\varphi(n) = n$. Enfin dans le cas où $\ell_1 = -\infty$, on construit φ comme précédemment en prenant cette fois-ci $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \leqslant -n$ par exemple. Pour la construction par récurrence, on a de même que $A = \{p > \varphi(n), u_p \leqslant -n-1\}$ est non-vide sinon $u_p > -n-1$ pour tout $p > \varphi(n)$, donc $v_{\varphi(n)+1} \geqslant -n-1$ et donc $\ell_1 \geqslant -n-1$, or $\ell_1 = -\infty$. On a donc de même $u_{\varphi(n)} \leqslant -n$ donc $(u_{\varphi(n)})$ converge vers $-\infty = \ell_1$.

   On fait exactement de même pour montrer que ℓ_2 est la plus grande des valeurs d'adhérence (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

5. L'idée est, pour construire une suite extraite qui converge vers ℓ lorsque $\ell \in]\ell_1, \ell_2[$ (on en a déjà qui convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 dans les questions précédentes), de regarder les instants où u_n est plus petit que ℓ et u_{n+1} est plus grand. Comme la suite passe aussi proche que l'on veut de ℓ_1 et de ℓ_2, elle va « remonter » un nombre infini de fois. Comme à chaque fois l'écart entre deux valeurs successives devient de plus en plus petit, les indices où cela « traverse » la hauteur ℓ correspondent à des valeurs très proches de ℓ.

   Plus précisément pour $n \in \mathbb{N}$, montrons que l'on peut trouver $p \geqslant n$ tel que $x_p \leqslant \ell$ et $x_{p+1} \geqslant \ell$. Si $A = \{k \geqslant n, x_k \leqslant \ell\}$, alors A est non-vide sinon on aurait $\ell_1 \geqslant \ell$, et on note k_0 son plus petit élément. Ensuite $B = \{k \geqslant k_0, x_{k+1} \geqslant \ell\}$ est non-vide pour la même raison, et on note k_1 son plus petit élément. Si $k_1 = k_0$, alors $x_{k_1} = x_{k_0} \leqslant \ell$ et $x_{k_1+1} \geqslant \ell$, et si $k_1 > k_0$, alors $k_1 - 1 \geqslant k_0$ et $k_1 - 1 \notin B$, donc $x_{k_1-1+1} < \ell$. On a donc bien dans tous les cas $x_{k_1} \leqslant \ell$ et $x_{k_1+1} \geqslant \ell$. Donc on a bien construit un indice $k_1 \geqslant n$ qui convient. On pose donc $\varphi(n)$ par récurrence, de sorte que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, que $x_{\varphi(n)} \leqslant \ell$ et $x_{\varphi(n)+1} \geqslant \ell$.

   Ensuite, en notant $\delta_n = x_{n+1} - x_n$ (qui tend vers 0), on obtient que

$$\ell \geqslant x_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)+1} - \delta_{\varphi(n)} \geqslant \ell - \delta_{\varphi(n)},$$

   et donc par encadrement on a bien $x_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Exercice 5.

1. Prendre $\varepsilon > 0$, et n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Écrire alors que

$$\begin{aligned} |S_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (u_n - \ell) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n} (u_n - \ell) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_n - \ell) \right| + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n} \\ &\leqslant \frac{n_0}{n} |S_{n_0} - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

   Le premier terme tendant vers 0, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait donc $|S_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $S_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

2. Par exemple pour $\ell = +\infty$. Pour $M > 0$ il existe n_0 tel que $u_n \geqslant 2M$ pour $n \geqslant n_0$. Et alors avec le même découpage que précédemment $S_n \geqslant \frac{n_0}{n} S_{n_0} + 2M \frac{n-n_0}{n} = 2M + \frac{n_0}{n}(S_{n_0} - 2M)$. En prenant n_1 suffisamment

grand (tel que $\frac{n_0}{n}(2M - S_{n_0}) \leqslant M$ dès que $n \geqslant n_1$, ce qui est possible puisque le membre de gauche tend vers 0), on obtient que pour $n \geqslant n_1, S_n \geqslant 2M - M = M$. On a donc bien montré que $S_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$. On fait exactement de même pour le cas $u_n \to -\infty$ (ou on applique le résultat à $-u_n$, qui tend vers $+\infty$, donc $-S_n \to +\infty$).

3. On prend $u_n = (-1)^n$. Alors $\sum_{k=1}^n u_n = 0$ si n est pair et -1 si n est impair. Donc $S_n = 0$ si n est pair et $\frac{-1}{n}$ pour n impair. On a donc bien S_n qui tend vers 0, et pourtant u_n ne tend pas vers 0.
4. D'après la question 2, on ne peut pas avoir (u_n) non-bornée, sinon comme elle est monotone elle convergerait vers $+\infty$ ou $-\infty$ mais alors (S_n) convergerait aussi vers cette limite, or $(S_n) \to \ell \in \mathbb{R}$. Donc (u_n) est monotone et bornée, converge donc vers une limite ℓ'. Par la question 1, on obtient que (S_n) converge donc vers ℓ', et par unicité de la limite, $\ell = \ell'$.

Exercice 6.

1. Étudier les variations de P_n sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que x_n est croissante, bornée par 1, et que sa limite ne peut être que 1.
3. Montrer que $\ln(-\ln(1 - \varepsilon_n)) \sim \ln \varepsilon_n$ (ce qui utilise le fait que $\varepsilon_n \to 0$), et diviser l'égalité par $\ln \varepsilon_n$, pour obtenir que $\frac{\ln(-\ln \varepsilon_n)}{\ln \varepsilon_n} - \frac{\ln n}{\ln \varepsilon_n} \to 1$. Il reste donc à montrer que $\frac{\ln(-\ln \varepsilon_n)}{\ln \varepsilon_n} \to 0$, ce qui s'obtient en notant que $-\ln \varepsilon_n \to +\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
4. On doit trouver
$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(\ln n)}{n} - \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{n \ln n}\right).$$
Poser $z_n = 1 - \frac{\ln n}{n} - x_n$ et faire le même type de raisonnement pour montrer que $z_n \sim -\frac{\ln(\ln n)}{n}$. Puis poser $t_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(\ln n)}{n} - x_n$ pour obtenir que $t_n \sim -\frac{\ln(\ln n)}{n \ln n}$, de la même façon. Attention les calculs peuvent être longs !

Exercice 7.

1. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. On a que (u_n) est strictement croissante et tend vers e donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < e$. Pour montrer que $v_n > e$, on a deux solutions. Soit une estimation :
$$e = u_n + \sum_{k>n} \frac{1}{k!} = u_n + \sum_{k>n} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} \cdots \frac{1}{k} < u_n + \frac{1}{n!} \sum_{k>n} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = u_n + \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = v_n,$$
soit on voit que $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n \cdot n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1) \cdot (n-1)!} = \frac{(n-1) + n(n-1) - n^2}{n(n-1) \cdot n!} = \frac{-1}{n(n-1) \cdot n!}$, ce qui donne que (v_n) est strictement décroissante, et comme elle converge vers e, on obtient que $v_n > e$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Si $e = \frac{p}{q}$, l'idée est de choisir le bon n dans les inégalités précédentes, et de s'arranger pour obtenir une inégalité sur les entiers : on prend $n = q$, et on obtient donc $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. En multipliant par $q \cdot q!$, on s'aperçoit que $q \cdot q! u_q$ est un entier, que l'on note N : en effet, $k!$ divise $q!$ pour $k \leqslant q$. On a donc $N < p \cdot q! < N + 1$, ce qui est en contradiction avec le fait que p est un entier.

Exercice 8.

1. On utilise le critère des séries alternées. Comme les termes pairs sont positifs, on obtient donc que $S \geqslant S_1 = u_0 + u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Comme $\Sigma \frac{1}{n+1}$ n'est pas convergente (par exemple par comparaison série-intégrale, ou par critère des séries de Riemann), la série n'est pas absolument convergente.
2. La bijection réciproque est donnée suivant le reste de n dans la division par 4 :
$$\varphi^{-1}(n) = \begin{cases} 6p & \text{si } n = 4p \\ 3p + 1 & \text{si } n = 4p + 1 \\ 6p + 3 & \text{si } n = 4p + 2 \\ 3p + 2 & \text{si } n = 4p + 3. \end{cases}$$
Le calcul demandé donne donc, en posant (T_n) la suite des sommes partielles de v_n, que $T_{3n-1} = \Sigma_{k=0}^{n-1}(v_{3k} + v_{3k+1} + v_{3k+2}) = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n-1} u_{2k} + u_{2k+1}) = \frac{1}{2} S_{2n-1}$. Et donc T_{3n-1} converge vers $\frac{1}{2}S$. Ensuite on a aussi $T_{3n} = T_{3n-1} + v_{3n}$ qui converge vers $\frac{1}{2}S$ puisque $(v_{3n}) = (u_{2n})$ converge vers 0. Et de même T_{3n+1} converge vers $\frac{1}{2}S$. On en déduit que T_n converge vers $\frac{1}{2}S \neq S$. On a donc bien trouvé une limite de sommes différente en faisant une bijection sur les indices.

3. L'idée est de mettre les indices n pour lesquels $a_n \geqslant 0$ les uns à la suite des autres jusqu'à ce que la somme de termes concernés soit plus grande que α, puis de mettre ensuite les indices où $a_n < 0$ jusqu'à ce que la somme soit inférieure à α, de recommencer avec les termes positifs, etc. Au final on peut montrer que la suite des sommes partielles converge en utilisant que $a_n \to 0$ (puisque la série converge).

   Plus précisément, on sépare d'abord les termes positifs des négatifs, et on montre que les deux séries obtenues sont divergentes :

   On pose $P = \{n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0\}$, et $M = \{n \in \mathbb{N}, a_n < 0\}$.

   On pose $S_N^P = \displaystyle\sum_{n=0, n\in P}^{N} a_n$ (qui est une suite positive croissante) et $S_N^M = \displaystyle\sum_{n=0, n\in M}^{N} a_n$ (qui est négative décroissante).

   On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n| = S_N^P - S_N^M \to +\infty$ quand $N \to \infty$, donc soit $S_N^P \to +\infty$, soit $S_N^M \to -\infty$.

   D'autre part comme $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n = S_N^P + S_N^M$, on ne peut pas avoir l'une des suites S_N^P ou S_N^M qui converge sinon l'autre divergerait d'après la remarque précédente, et donc S_N ne convergerait pas.

   On a donc $S_N^P \to +\infty$ et $S_N^M \to -\infty$ quand $N \to \infty$.

   On va construire la permutation comme ceci : on ajoute d'abord les premiers termes de S^P jusqu'à ce que la somme dépasse α, puis ceux de S^M jusqu'à se retrouver en dessous de α,et ainsi de suite.

   Formellement, on pose $\sigma(0) = 0$, et on construit la suite par récurrence, pour $n \geqslant 0$, en distiguant deux cas :

   — Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} < \alpha$, on pose $\sigma(n+1) = \min(P \setminus \{\sigma(i)\}_{i\in[\![0,n]\!]})$ (comme $S_N^P \to +\infty$, P est infini, donc ce plus petit élément est bien défini).

   — Sinon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \geqslant \alpha$ et on pose $\sigma(n+1) = \min(M \setminus \{\sigma(i)\}_{i\in[\![0,n]\!]})$ (bien défini, pour une raison analogue).

   On a donc construit une application σ. Par construction elle est injective, il reste à montrer qu'elle est surjective. On fait ça par l'absurde. Si par exemple $N \notin \sigma(\mathbb{N})$, avec $N \in P$, alors les $\sigma(k)$ dans P sont tous inférieurs à N strictement, donc à partir d'un certain rang n_0, les $\sigma(k)$ sont tous dans M, donc pour $n \geqslant n_0$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \geqslant \alpha$.

   Or on a aussi $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} a_{\sigma(k)} + \sum_{k=n_0}^{n} a_{\sigma(k)} = T_{n_0} + \sum_{k=\sigma(n_0), k\in M}^{\sigma(n)} a_k = T_{n_0} - S_{\sigma(n_0)-1}^M + S_{\sigma(n)}^M$, et comme $\sigma(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ (car σ est injective), on a $T_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, d'où la contradiction.

   On aurait pu raisonner de même avec $N \notin \sigma(\mathbb{N})$, et $N \in M$. Donc σ est surjective, et au final on a bien construit une permutation σ de $\mathbb{N}$.

   Il reste à montrer que $T_n \to \alpha$ quand $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme S_n converge, alors $a_n \to 0$, et comme $\sigma(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, $a_{\sigma(n)} \to 0$. Soit donc n_0 tel que $|a_{\sigma(n)}| < \varepsilon$. Comme les $\sigma(k)$ ne sont pas tous dans P ou dans M à partir d'un certain rang, il existe $N_0 > n_0$ avec $\sigma(N_0) \in P$ et $\sigma(N_0+1) \in M$. Donc $T_{N_0-1} < \alpha$ et $T_{N_0} \geqslant \alpha$. Mais comme leur différence est $a_{\sigma(N_0)} \in [0, \varepsilon[$, alors $T_{N_0-1} = T_{N_0} - a_{\sigma(N_0)} \in]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ et $T_{N_0} = T_{N_0-1} + a_{\sigma(N_0)} = \in [\alpha, \alpha+\varepsilon[$.

   Montrons alors par récurrence que si $n \geqslant N_0$, alors $T_n \in]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, et on aura terminé. C'est vrai au rang N_0. Supposons que c'est vrai au rang $n \geqslant N_0$.

   Si $T_n < \alpha$, alors $T_{n+1} = T_n + a_\sigma(n)$ avec $0 \leqslant a_{\sigma(N_0)} < \varepsilon$, donc $T_{n+1} \in [T_n, T_n + \varepsilon[\subset]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$. Et si $T_n \geqslant \alpha$, alors $T_{n+1} = T_n + a_\sigma(n)$ avec $-\varepsilon < a_{\sigma(N_0)} < 0$, donc $T_{n+1} \in]T_n - \varepsilon, T_n[\subset]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$.

4. Pour faire ceci, il suffit de « monter de plus en plus haut » et de « descendre de plus en plus bas » à chaque fois. On défninit $H(n)$, la « hauteur à atteindre », et $\widetilde{\sigma}(n)$ par récurrence. On pose $\widetilde{\sigma}(0) = 0$ et $H(0) = 1$. Pour $n \geqslant 0$, on distigue quatre cas :

   — Si $H(n) > 0$:

     — Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\widetilde{\sigma}(k)} < H(n)$, on pose $H(n+1) = H(n)$ et $\widetilde{\sigma}(n+1) = \min(P \setminus \{\widetilde{\sigma}(i)\}_{i\in[\![0,n]\!]})$.

     — Sinon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\widetilde{\sigma}(k)} \geqslant H(n)$ (on a dépassé la « barre ») et on pose $H(n+1) = -H(n)$ et $\widetilde{\sigma}(n+1) = \min(M \setminus \{\widetilde{\sigma}(i)\}_{i\in[\![0,n]\!]})$.

— Si $H(n) \leqslant 0$:
— Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\widetilde{\sigma}(k)} < H(n)$ (on est tombé en dessous de la « barre »), on pose $H(n+1) = -H(n) + 1$ et $\widetilde{\sigma}(n+1) = \min(P \setminus \{\widetilde{\sigma}(i)\}_{i \in [\![0,n]\!]})$.
— Sinon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\widetilde{\sigma}(k)} \geqslant H(n)$ et on pose $H(n+1) = H(n)$ et $\widetilde{\sigma}(n+1) = \min(M \setminus \{\widetilde{\sigma}(i)\}_{i \in [\![0,n]\!]})$.

On passe alternativement avec des « barres »à 1, -1, 2, -2... On peut alors montrer facilement qu'on peut extraire une suite qui tend vers $+\infty$ et une autre vers $-\infty$. Et pour les limites réelles, il suffit de voir que par « l'oscillation » et le fait que deux termes consécutifs diffèrent d'un terme qui tend vers 0, l'ensemble $\{n \geqslant N, S_n^{\widetilde{\sigma}} \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[\}$ est infini, pour tout N et tout $\varepsilon > 0$, donc qu'on peut bien extraire de façon idoine.

Exercice 9.

1. La série $\sum u_n$ est convergente (série aux différences) et on a $a_n u_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$. Pour $t \in [a_{n-1}, a_n]$, on a $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{a_{n-1}}$, donc $\int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = a_n u_n$.
   En faisant la somme, on a donc $\sum_{n=1}^{N} a_n u_n \geqslant \int_{a_0}^{a_N} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a_N) - \ln(a_0)$, ce qui tend bien vers $+\infty$ lorsque $N \to \infty$.

2. On va majorer $\dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$ à l'aide d'une intégrale. En effet $\dfrac{a_n}{R_n^\alpha} = \dfrac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha} = \displaystyle\int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{1}{R_n^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{1}{t^\alpha}$, car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{R_k^\alpha} \leqslant \int_{R_{n+1}}^{R_0} \frac{1}{t^\alpha} \leqslant (1-\alpha)R_0^{1-\alpha} - (1-\alpha)R_{n+1}^{1-\alpha} \leqslant (1-\alpha)R_0^{1-\alpha}$, et donc la série $\sum \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$ converge
   Remarque : On a en fait le résultat suivant, pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $\sum \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

3. Pour montrer que $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge, on va montrer qu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Soit $n \leqslant m$ deux entiers. On utilise la croissance de S_n, et on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_m} = \frac{S_m - S_n}{S_m} = 1 - \frac{S_n}{S_m}$. Pour n fixé, comme $S_m \to +\infty$ quand $m \to \infty$, on peut toujours trouver m tel que $1 - \dfrac{S_n}{S_m} \geqslant \dfrac{1}{2}$. La série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ ne vérifie donc pas le critère de Cauchy, et est donc divergente.
   Remarque : On a en fait le résultat suivant, pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $\sum \dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Exercice 10.

1. On montre qu'une permutation ayant un grand cycle de longueur k (avec $k > n$), c'est à dire qu'il existe a tel que $\sigma^k(a) = a$, et $\sigma^i(a) \neq a$ si $1 \leqslant i < k$ (les images successives par σ retombent sur le même point au bout de k itérations, on dit que a est un élément du cycle) est uniquement déterminée par la donnée de tous les éléments du cycle (un ensemble à k éléments parmi $2n$), puis de la succession des $k-1$ images du plus petit élément du cycle en appliquant σ, ainsi que des images par σ correspondant aux éléments qui ne sont pas dans le cycle.
   Autrement dit, si on note E_k l'ensemble des permutations ayant un grand cycle de longueur k (avec $k > n$), on veut montrer que l'application qui à $\sigma \in E_k$ associe
   — l'ensemble $A = \{a \in [\![1, 2n]\!], \sigma^k(a) = a \text{ et } \forall i \in [\![0, k-1]\!], \sigma^i(a) \neq a\}$,
   — le $(k-1)$-uplet d'entiers $(\sigma^i(a_0))_{i \in [\![1,k-1[\![}$, où $a_0 = \min A$,
   — le $(2n-k)$-uplet d'entiers $(\sigma(b_j))_{j \in [\![1,2n-k]\!]}$, où $[\![1, n]\!] \setminus A = \{b_j, j \in [\![1, 2n-k]\!]\}$, avec $b_1 < b_2 < \cdots < b_{2n-k}$,
   est injective.
   Montrons d'abord que A est bien de cardinal k si $\sigma \in E_k$. Pour ça, on a déja que dès que $a \in A$, les $\sigma^i(a)$ sont des éléments de A (pour $i \in [\![1, k-1]\!]$), puisque $\sigma^k(\sigma^i(a)) = \sigma^i(\sigma^k(a)) = \sigma^i(a)$, et que si $j \in [\![1, k-1]\!]$, $\sigma^j(\sigma^i(a)) = \sigma^i(\sigma^j(a)) \neq \sigma^i(a)$ (car sinon on appliquerait σ^{-i} et on obtiendrait $\sigma^j(a) = a$). Ensuite, si $a \in A$, les $\sigma^i(a)$ sont deux à deux distincts pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, puisque par exemple si $1 \leqslant i < j < k$, on a $\sigma^j(a) = \sigma^{j-i}(\sigma^i(a)) \neq \sigma^i(a)$ d'après ce qui précède. On obtient donc que si on note $a_0 = \min A$, alors A a au moins k éléments : $a_0, \sigma(a_0), \ldots, \sigma^{k-1}(a_0)$. Enfin si $\widetilde{a} \in A$ et $\widetilde{a}$ est différent de tous ces éléments, alors $\sigma^i(\widetilde{a})$ est différent de tous ces éléments aussi, dès que $i \in [\![1, k-1]\!]$. En effet, sinon on aurait par exemple $\sigma^i(\widetilde{a}) = \sigma^j(a_0)$, et en appliquant σ^{-i}, on aurait $\widetilde{a} = \sigma^{j-i}(a_0)$, ce qui est une contradiction

si $j \geqslant i$, et en appliquant σ^k on obtient $\sigma^k(\widetilde{a}) = \widetilde{a} = \sigma^{k-(i-j)}$, ce qui est une contradiction si $i < j$. Donc on obtient k autres éléments de A : $\widetilde{a}, \sigma(\widetilde{a}), \dots, \sigma^{k-1}\widetilde{a}$. Mais comme $2k > n$ et que $A \subset [\![1, 2n]\!]$, ce n'est pas possible.

On vient donc de montrer que $A = \{a_0, \sigma(a_0), \dots, \sigma^{k-1}(a_0)\}$.

Donc si deux permutations σ et φ de E_k donnent le même A, que $\sigma^i(a_0) = \varphi^i(a_0)$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, et que $\sigma(b_j) = \varphi(b_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant 2n-k$ (autrement dit que les fonctions σ et φ coïncident sur $[\![1, 2n]\!] \setminus A$), alors on a aussi $\sigma^k(a_0) = a_0 = \varphi^k(a_0)$, et donc pour $i \in [\![0, k-1[\![$, $\sigma(\sigma^i(a_0)) = \sigma^{i+1}(a_0) = \varphi^{i+1}(a_0) = \varphi(\varphi^i(a_0)) = \varphi(\sigma^i(a_0))$. Donc σ et φ ont la même image sur tous les éléments de A. Comme c'était aussi le cas sur les éléments de $[\![1, 2n]\!] \setminus A$, on en conclut que φ et σ sont les mêmes permutations.

On peut donc compter le nombre d'éléments de E_k en comptant les possibilités pour les ensembles A, les $\sigma^i(a_0)$, et les $\sigma(b_j)$.

Pour un ensemble $A \subset [\![1, 2n]\!]$ à k éléments, il y a $\binom{2n}{k}$ possibilités.

Une fois A fixé, pour $\sigma(a_0)$, on a $k-1$ possibilités (cela doit être dans $A \setminus \{a_0\}$). Pour $\sigma^2(a_0)$, une fois $\sigma(a_0)$ fixé, il y a donc $k-2$ possibilités, etc. Soit en tout $(k-1)!$ possibilités. Enfin pour les images des éléments qui ne sont pas dans le cycle, on a $2n-k$ possibilités pour $\sigma(b_1)$, $2n-k-1$ pour $\sigma(b_2)$ une fois $\sigma(b_1)$ fixé, etc. Soit en tout $(2n-k)!$.

On a donc en tout $\binom{2n}{k}(k-1)!(2n-k)! = \frac{(2n)!(k-1)!(2n-k)!}{k!(2n-k)!} = \frac{(2n)!}{k}$ permutations dans E_k.

Le nombre total de permutations de $\mathcal{S}_{2n}$ étant $(2n)!$, la proportion de la proportion de permutations ayant un grand cycles est donc $p = \frac{1}{(2n)!} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$, ce qui correspond bien au résultat demandé.

2. Par comparaison somme-intégrale : $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$ pour $t \in [k-1, k]$, donc $p \leqslant \sum_{k=n+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$.

3. L'astuce est la suivante : chaque élève se donne un numéro au hasard entre 1 et 130. Et on numérote les coffres de 1 à 130. La fonction « numéro de coffre » $\mapsto$ « numéro de l'élève dont le nom est marqué dans le coffre » est donc une permutation (choisie au hasard). Quand l'élève n arrive dans la salle, il ouvre le coffre n, puis lit le nom dedans, qui est celui de l'élève n_1, et va ouvrir le coffre n_1, dans lequel est écrit le nom de l'élève n_2, etc. Si la permutation n'a pas de grand cycle, l'élève va donc finir par trouver son nom en 65 étapes ou moins, et ceci quelque soit l'élève. Donc les élèves ont une probabilité $1 - p \geqslant 30\%$ de gagner.

   S'ils avaient ouvert au hasard indépendamment chacun 65 coffres, chacun aurait eu une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, donc la probabilité qu'ils gagnent tous serait de $\frac{1}{2^{65}}$, soit environ 10^{-19}...

   Remarque : Si la permutation a un grand cycle, tous les élèves dont le numéro est un élément du cycle vont échouer en même temps. L'astuce a permis de changer le « tirage au hasard » de place dans la stratégie, de telle sorte que les élèves n'agissent plus du tout indépendamment les uns des autres (au passage, il faut savoir comment faire pour choisir uniformément une permutation au hasard, et c'est une autre histoire).

   On peut d'ailleurs calculer la probabilité q pour le joueur i de gagner en suivant cette stratégie : elle est de 1 si la permutation n'a pas de grand cycle (événement qui a une probabilité $1-p$), et de $\frac{2n-k}{2n}$ si la permutation a un grand cycle de longueur k (il faut que i n'appartienne pas aux éléments du grand cycle, dans ce cas la stratégie fonctionne pour lui), ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{k}$. Autrement dit on a

$$q = 1 - p + \sum_{k=n+1}^{2n} \tfrac{2n-k}{2nk} = 1 - p + \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{2n}\right) = 1 - p + p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   Chaque élève a donc bien une chance sur deux de ne pas réussir !

2.2 Espaces métriques, complétude, topologie

Exercice 11. On part des trois propriétés suivantes (venant de la définition de l'adhérence d'un ensemble comme le plus petit fermé contenant cet ensemble, et) :

— pour tout ensemble $A \subset E$, $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$,

— si $A \subset F$ avec F fermé, alors $\overline{A} \subset F$,

— si $U \subset A$ avec U ouvert, alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Donc si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset A \subset B \subset \overline{B}$. Comme $\overline{B}$ est un fermé alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. Et comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ (autrement dit les applications « adhérence » et « intérieur » sont croissantes pour l'inclusion.

On a donc, en posant $B = \overline{\mathring{A}}$, que B est un ouvert, donc comme $B \subset \overline{B}$, on obtient $B \subset \mathring{\overline{B}}$. On a de plus $B \subset \overline{A}$, qui est fermé, donc $\overline{B} \subset \overline{A}$, puis en passant à l'intérieur, $\mathring{\overline{B}} \subset \mathring{\overline{A}} = B$. On a donc les deux inclusions, et donc $B \subset \mathring{\overline{B}}$.

On fait de façon analogue pour comparer les deux autres, ou on passe au complémentaire, puisque l'adhérence du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur.

Remarque : on a en fait montré que si F est fermé, alors $\mathring{F} = \mathring{\overline{\mathring{F}}}$, et que si U est ouvert, alors $\overline{U} = \overline{\mathring{\overline{U}}}$.

Exercice 12.

1. Comme l'espace est compact, si (x_n) est une suite de Cauchy, on peut en extraire une sous-suite $(x_\varphi(n))$ convergente vers $x \in E$. Il suffit de montrer que (x_n) converge vers x. On prend $\varepsilon > 0$. Il existe donc un n_0 tel que pour tous $n, p \geqslant n_0$, on ait $d(x_n, x_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers E, il existe un $n_1 \geqslant n_0$ pour lequel $d(x_{\varphi(n_1)}, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Donc pour $n \geqslant \varphi(n_1)(\geqslant n_1 \geqslant n_0)$, on a $d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\varphi(n_1)}) + d(x_{\varphi(n_1)}, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
2. L'idée est de dire qu'un point fixe est un zéro de la fonction $h : x \in E \mapsto d(x, f(x)) \in \mathbb{R}_+$. S'il y a un zéro, c'est donc un minimum. On va utiliser le fait qu'une fonction continue sur un compact atteint son minimum (rappel de la preuve : on prend x_n une suite minimisante telle que $h(x_n) \to m$, où $m = \inf_{x \in E} h(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, on extrait de sorte que $x_{\varphi(n)} \to x \in E$, et à la limite on obtient que $m = h(x)$, donc $m \in \mathbb{R}$, et la borne inférieure est bien atteinte).

   Montrons donc que la fonction h est continue. En effet on a, d'après l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, donc $d(x, y) \geqslant d(y, z) - d(x, z)$, et par symétrie de y et x, on obtient $d(x, y) = d(y, x) \geqslant d(x, z) - d(y, z)|$. Donc au final on obtient $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$ (on appelle parfois cette propriété l'inégalité triangulaire renversée). Autrement dit, à z fixé, la fonction $x \mapsto d(x, z)$ est 1-Lipschitzienne (donc continue).

   On a donc pour $x, y \in E$,

   $$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| = |d(x, f(x)) - d(y, f(y))| &\leqslant |d(x, f(x)) - d(f(x), y)| + |d(f(x), y) - d(y, f(y))| \\ &\leqslant d(x, y) + d(f(x), f(y)) \leqslant 2d(x, y). \end{aligned}$$

   La fonction h est donc 2-Lipschitzienne, donc continue. Donc en prenant un point de minimum x, on obtient que si x était différent de $f(x)$, alors on aurait $d(f(x), f(f(x))) < d(x, f(x))$, donc $h(f(x)) < h(x)$, donc x ne serait pas un minimum. Donc on a bien $x = f(x)$, donc x est bien un point fixe.

   Pour l'unicité, c'est immédiat avec la propriété : si $x \neq y$ sont deux points fixes, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, ce qui est une contradiction.

   Enfin, si $x_{n+1} = f(x_n)$, on a que $d(x_{n+1}, x) = d(f(x_n), f(x)) \leqslant d(x_n, x)$. Donc la suite des $d(x_n, x)$ est décroissante. Si sa limite ℓ est strictement positive, alors par compacité, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $y \in E$, avec donc $d(y, x) = \ell$. Et par continuité $x_{n+1} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(y)$ lorsque $n \to +\infty$, donc $d(x, f(y)) = \ell$. On obtient donc $\ell = d(x, f(y)) = d(f(x), f(y)) < d(x, y) = \ell$, d'où la contradiction. On a donc $\ell = 0$, ce qui donne bien que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 13.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $r \in [\![0, q-1]\!]$, on prend n_r tel que pour tout $n \geqslant n_r$, $d(x_{qn+r}, x) \leqslant \varepsilon$. Alors en prenant $M = \max_{0 \leqslant r < q} qn_r + r$, on a que pour $m \geqslant M$, m s'écrit de la forme $qn + r$ avec $n \geqslant n_r$, donc $d(x_m, x) = d(x_{qn+r}, x) \leqslant \varepsilon$.
2. Par le théorème du point fixe de Banach-Picard, f^q admet un unique point fixe x. Or un point fixe de f est aussi un point fixe de f^q ce qui donne l'unicité. Pour l'existence, on écrit que si $f^q(f(x)) = f(f^q(x)) = f(x)$, donc $f(x)$ est un point fixe de f^q, c'est à dire x. Donc x est aussi un point fixe de f. Prenons maintenant une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Par le théorème du point fixe toute suite définie par $y_{n+1} = f^q(y_n)$ converge vers x, et en posant $y_n = x_{qn+r}$ (pour $r \in [\![0, q-1]\!]$ fixé), on a bien $y_{n+1} = f^q(y_n)$. Donc toutes les suites (x_{qn+r}) convergent vers x et d'après le point précédent, (x_n) converge donc aussi vers x.

   Remarque : on n'a même pas supposé ici que la fonction f est continue. Le fait que f^n le soit est suffisant pour avoir un unique point fixe pour f (mais ne prouve rien sur la continuité de f...).

Exercice 14.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend x_n un élément de K_n. Comme les K_n sont emboîtés, par récurrence on a $K_n \subset K_m$ si $m \in [\![0, n]\!]$, donc en particulier tous les x_n sont dans K_0. Comme K_0 est compact, on

peut trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans K_0, vers une limite x. Mais comme pour $n \geqslant n_0$ on a $\varphi(n) \geqslant n_0$, alors $x_{\varphi(n)} \in K_{n_0}$. Et par le fait que K_{n_0} est fermé, on obtient que la limite x est bien dans K_{n_0}. Ceci étant vrai pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a donc bien que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, qui est donc non vide.

Montrons maintenant que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact. Soit (y_m) une suite d'éléments de K. Comme tous les y_m sont dans K_0, on peut extraire une suite $(y_{\psi(m)})$ qui converge vers $y \in K_0$. Mais de même que précédemment, pour n fixé, tous les $y_{\psi(m)}$ sont dans K_n qui est fermé, donc la limite y est dans K_n. On a donc que $y \in K$. Et on a donc bien construit une sous-suite $(y_{\psi(m)})$ qui converge vers un élément de K.

2. Attention à l'énoncé, il ne faut pas montrer seulement l'unicité, mais bien l'existence également !

   Pour (x_n) une suite d'éléments telles que chaque x_n est dans F_n (donc aussi dans tous les F_m pour $m \in [\![0, n]\!]$), on va montrer qu'elle est de Cauchy.

   En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\delta_{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Et alors pour $n, p \geqslant n_0$, on a x_n et x_p qui sont dans F_{n_0}. Donc en notant y_{n_0} le centre de la boule de rayon δ_{n_0} qui contient F_{n_0}, on a $d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, y) + d(x_p, y) \leqslant 2\delta_{n_0} \leqslant \varepsilon$. La suite est bien de Cauchy, elle converge donc vers un élément x de E. Pour n fixé, comme F_n est fermé et que tous les x_p sont dans F_n pour $p \geqslant n$, en passant à la limite $(p \to +\infty)$ on obtient bien que $x \in F_n$. Donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ qui est donc non vide.

   Si x et y sont deux éléments de F_n, le même calcul que précédemment montre que $d(x, y) \leqslant 2\delta_n$. Donc si $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors $d(x, y) \leqslant 2\delta_n$ pour tout n et donc $x = y$. L'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est donc bien réduit à un unique élément.

3. On pose $F_n = \{e_k, k \geqslant n\}$. Pour montrer que c'est fermé, il suffit de voir que si une suite converge, alors elle doit être constante égale à un des e_k à partir d'un certain rang (en effet $\|e_k - e_\ell\| = 1$ pour $k \neq \ell$). Donc on a des fermés, non vides, emboîtés, tous inclus dans la boule de centre la suite nulle et de rayon 2 par exemple, mais dont l'intersection est vide. Donc dans le point précédent, il est important que les fermés soient inclus dans des boules de rayon tendant vers 0.

   En dimension finie, ce n'est pas possible de créer ce contre-exemple à cause du premier point. Si tous les fermés sont bornés, alors ils sont compacts. Et leur intersection est donc non vide (mais elle n'est pas forcément réduite à un singleton).

Exercice 15.

1. Convexes : $\mathbb{R}^n, B(x, r), \overline{B}(x, r), \{x\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant x^2\} \dots$ Pas convexes : $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \{x, y\}$ pour $x \neq y$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leqslant x^2\} \dots$
2. Utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
3. Montrer que les hypothèses du point fixe de Banach-Picard s'appliquent (un compact est complet) pour f_n, et montrer que la suite des points fixes de f_n admet une sous-suite convergente, vers une limite qui est un point fixe de f.
4. Faire des dessins !
5. Encore plus de dessins. En dimension finie, montrer qu'un convexe d'intérieur vide est inclus dans un espace de dimension strictement inférieure. En dimension infinie, penser par exemple à $C = \mathbb{R}[x]$ vu comme un sous-espace vectoriel de $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On peut montrer que $\overset{\circ}{C} = \emptyset$ alors que $\overline{C} = E$.

Exercice 16.

1. (a) On fait le sens direct par contraposée. S'il existe un ouvert V non-vide tel que $U \cap V = \emptyset$, alors en notant $F = \mathbb{R}^n \setminus U$, on a donc $V \subset F$ et V ouvert, donc $V \subset \overset{\circ}{F} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$, et comme V est non vide, alors on ne peut pas avoir $\overline{U} = \mathbb{R}^n$, donc U n'est pas dense dans $\mathbb{R}^n$. On a donc montré (par contraposée) que si U est dense, alors pour tout ouvert V non vide, $U \cap V \neq \emptyset$.

   On va faire le sens réciproque également par contraposée. Si U n'est pas dense, alors $V = \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ est un ouvert non-vide. D'autre part $U \subset \overline{U}$, donc $V = \mathbb{R}^n \setminus \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, ce qui veut dire que $V \cap U = \emptyset$. On a donc bien trouvé un ouvert non-vide ne rencontrant pas U.

   Remarque : On peut faire les deux sens sans utiliser la contraposée, en utilisant la caractérisation de l'adhérence par les suites. Si U est dense, alors si V est un ouvert non vide (donc contenant un point $x \in \mathbb{R}^n$), on peut trouver une boule de centre x et de rayon $r > 0$ incluse dans V, puis une suite de points de U qui converge vers x, donc à partir d'un certain rang les points sont dans V, donc dans $U \cap V$, qui est donc non-vide. Réciproquement, pour x fixé dans $\mathbb{R}^n$, si U rencontre l'ouvert $B(x, \frac{1}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cela permet de trouver $x_n \in U$ tel que $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, et donc on a une suite x_n de points de U qui converge vers x (il y a un axiome du choix caché ici).

(b) On utilise la caractérisation précédente. Si U et V sont ouverts, alors $U \cap V$ est aussi ouvert. Si de plus U et V sont denses, montrons que $U \cap V$ est dense. Pour cela on prend un ouvert W quelconque non-vide. Puisque V est dense, alors $W \cap V$ est non-vide. Mais comme $W \cap V$ est alors un ouvert non-vide, et que U est dense, alors $U \cap (W \cap V)$ est non vide, donc W rencontre bien $U \cap V$.

Le résultat n'est plus vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts (en fait on n'a utilisé que le fait que V était ouvert dans la démonstration). Un contre-exemple où les deux ensembles ne sont pas ouverts est par exemple $U = \mathbb{Q}$ et $V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, qui sont bien denses dans $\mathbb{R}$ mais dont l'intersection est vide.

2. (a) On a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B(0,k)}$.

(b) La fonction $f : x \mapsto \|x - y\|$ est continue (car 1-Lipschitzienne, par l'inégalitée triangulaire renversée), donc $F_y = f^{-1}([\frac{1}{k+1}, +\infty[)$ est fermé.

On a $K_k = \overline{B(a, k+1)} \cap (\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n \setminus U} F_y)$, qui est bien un fermé comme intersection de fermés, et borné car inclus dans la boule de centre a et de rayon $k+1$.

(c) On a déjà que $K_k \subset U$. En effet, si $x \notin U$ alors en prenant $y = x$, on a bien que $x \notin F_y$, donc $x \notin K_k$. Donc $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k \subset U$. Pour montrer l'inclusion réciproque, montrons que si $x \in U$ alors il existe un k tel que $x \in K_k$. Si ce n'était pas le cas, pour $k + 1 \geqslant \|x - a\|$, on aurait l'existence d'un $y_k \in \mathbb{R}^n \setminus U$ tel que $\|x - y_k\| < \frac{1}{k+1}$, et donc on aurait une suite y_k convergeant dans $\mathbb{R}^n \setminus U$ (fermé) vers x, et donc x serait dans $\mathbb{R}^n \setminus U$, ce qui est une contradiction.

(d) Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (dimension finie), et donc le fait d'être compact pour une norme ou une autre est la même chose. Donc la notion de σ-compacité ne dépend pas non-plus du choix de la norme.

Exercice 17.

1. On a bien $N(x - x) = 0$, donc $x\mathcal{R}x$, puis si $N(x - y) = 0$ alors $N(y - x) = N(-1 \cdot (x - y)) = |-1| \cdot 0 = 0$ donc si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$. Enfin, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $N(x-z) = N(x-y+y-z) \leqslant N(x-y)+N(y-z) = 0$, et comme N est positive, alors $N(x - z) = 0$, donc $x\mathcal{R}z$.
2. Si $N(x - x') = 0$ et $N(y - y') = 0$, alors $N(x + y - (x' + y')) \leqslant N(x - x') + N(y - y') = 0$, donc $N(x + y - (x' + y')) = 0$. De même $N(\lambda x - \lambda x') = N(\lambda(x - x')) = |\lambda| \cdot 0 = 0$.
3. Si $x\mathcal{R}x'$ alors $N(x) \leqslant N(x - x' + x') \leqslant N(x - x') + N(x') = N(x')$. Et par symétrie $N(x') \leqslant N(x)$, donc on a bien $N(x) = N(x')$.
4. On a déjà bien que $\bar{N}(\bar{x}) = N(x) \geqslant 0$. Ensuite si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\bar{N}(\lambda\bar{x}) = \bar{N}(\overline{\lambda x}) = N(\lambda x) = |\lambda| N(x) = |\lambda|\bar{N}(\bar{x})$. Pour l'inégalité triangulaire, on a de même $\bar{N}(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{N}(\overline{x+y}) = N(x+y) \leqslant N(x)+N(y) = \bar{N}(\bar{x}) + \bar{N}(\bar{y})$. Et enfin pour la définition, il suffit de montrer que si $\bar{N}(\bar{x}) = 0$, alors $\bar{x} = \bar{0}$ (ce qui est équivalent à dire que $x\mathcal{R}0$, ou encore $N(x-0) = 0$). Mais en effet si $\bar{N}(\bar{x}) = 0$, on a bien $N(x) = \bar{N}(\bar{x}) = 0$, donc $\bar{x} = \bar{0}$.
5. On a $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \|(f - g)'\|_\infty = 0$, autrement dit $f - g$ est une constante. Donc la relation d'équivalence peut s'écrire en français « différer d'une constante ». Si on note $\Phi : f \in E_0 \mapsto \bar{f} \in E/\mathcal{R}$ (c'est la restriction à E_0 de la projection canonique), montrons que Φ est un isomorphisme (on sait déjà que c'est linéaire). Si $f \in \ker\Phi$, alors $\bar{f} = \bar{0}$, ce qui signifie que f est constante. Mais comme $f \in E_0$, elle est constante et de moyenne nulle, donc nulle. Donc Φ est injectif. Soit maintenant $\bar{g} \in E/\mathcal{R}$. On cherche $f \in E_0$ telle que $\Phi(f) = \bar{g}$, autrement dit que $\bar{f} = \bar{g}$, où encore que f diffère d'une constante de g, tout en étant de moyenne nulle. Il suffit donc de poser $f = g - \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$, qui satisfait bien ces propriétés. Donc Φ est surjectif.

   Pour montrer que c'est une isométrie, on remarque qu'on a bien $\bar{N}(\Phi(f)) = \bar{N}(\bar{f}) = N(f) = N_0(f)$.

2.3 Fonctions réelles et un peu plus

Exercice 18. En notant ℓ la limite, regarder la limite de $f(x + nT)$.

Exercice 19. Utiliser le fait qu'une bijection continue entre deux intervalles est monotone, et regarder ce qu'il se passe aux bords. Un exemple de bijection continue de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ (pour changer des exemples utilisant la fonction tangente) : $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

Exercice 20.

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : si f n'est pas constante, alors on a $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Et donc $[y_1, y_2] \subset f(\mathbb{R})$, mais ce segment contient des irrationnels.

2. En tout point x de $\mathbb{Q}$, f n'est pas continue, puisqu'on peut trouver une suite x_n d'irrationnels qui tendent vers x, et que $f(x_n) = 0 \nrightarrow \frac{1}{q}$. Pour montrer qu'elle est continue en un point x fixé de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on prend $\varepsilon > 0$, et on prend $r \in \mathbb{N}^*$, tel que $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Soit K un entier tel que $x \in]-K, K[$. L'ensemble $\mathbb{Q}_K^r$ des rationnels de $]-K, K[$ qui s'écrivent $\frac{p}{q}$, avec p premier avec q et $q < r$, est fini (moins de $(2K+1)\frac{r(r-1)}{2}$ possibilités pour p). On peut donc trouver un petit intervalle $I \subset]-K, K[$, avec $x \in I$ et $I \cap \mathbb{Q}_K^r = \emptyset$. Alors si $y \in I$, soit y est irrationnel, soit y s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $q > r$ donc $f(y) - f(x) = 0$ ou $\frac{1}{q}$ et dans tous les cas $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
   Remarque : cette fonction a été introduite par Carl J. Thomae en 1875.

Exercice 21.

1. Pour le maximum : Si f est négative, c'est bon. Sinon prendre $\varepsilon = f(x_0) > 0$. Et prendre $M > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0+M, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0-M]$, $f(x) < \varepsilon$. On se place alors sur le segment $[x_0-M, x_0+M]$ sur lequel f atteint son maximum (puisqu'elle est continue), en un point x_1. On montre alors que c'est un maximum sur $\mathbb{R}$: en effet on a $f(x_1) \geqslant f(x)$ pour $x \in [x_0 - M, x_0 + M]$ et $f(x) < \varepsilon = f(x_0) \leqslant f(x_1)$ pour $x \notin [x_0 - M, x_0 + M]$.
   On fait de même pour le minimum (ou alors on applique le résultat à $-f$).
2. Appliquer le résultat précédent à la fonction $x \to \frac{|x|^n}{e^{2|x|}}$. On voit en plus qu'on peut trouver une constante C_n optimale, au sens où il existe des x pour lesquels l'inégalité est une égalité.

Exercice 22.

1. f' est croissante. On distingue les cas : soit f' a un zéro, et alors f est décroissante puis croissante. Soit f' est de signe constant, donc f est monotone et atteint donc son maximum sur les bords.
2. On a pour $x \in [a, b]$ que x s'écrit sous la forme $ta+(1-t)b$. Donc $f(x) = f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$. Si $f(a) \leqslant f(b)$ alors $f(x) \leqslant tf(b) + (1-t)f(b) = f(b)$, donc b est un point de maximum. Sinon de même $f(a)$ est un point de maximum, qui est donc dans tous les cas atteint.

Exercice 23.

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, en regardant ce qui se passe en 0 et en 1. On a en effet $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.
2. Poser $x_0 = \sup\{x \in [0,1], f(x) \geqslant x\}$ (c'est un ensemble non vide puisque $f(0) \geqslant 0$), et faire un dessin pour comprendre pourquoi x_0 est un point fixe : supposer que $f(x_0) \geqslant x_0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et aboutir à une contradiction (si $x_0 = 1$ c'est déjà une contradiction, et sinon pour $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$, $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant x$, et x_0 n'est pas le sup), de même si $f(x_0) \leqslant x_0 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, aboutir à une contradiction (pour $x_0 = 0$ c'est déjà une contradiction et sinon il existe $x_\varepsilon \in]x_0 - \varepsilon, x_0]$ tel que $f(x_\varepsilon) \geqslant x_\varepsilon > x_0 - \varepsilon \geqslant f(x_0)$, en contradiction avec la croissance de f).

Exercice 24. Faire un tableau de variation de $t \mapsto t \ln t$ et des dessins... Utiliser le fait qu'une fonction continue et bijective sur un intervalle est monotone.

Exercice 25.

1. L'idée est d'associer à chaque discontinuité x un rationnel dans l'intervalle $]f_g(x), f_d(x)[$ (les limites à gauche et à droite).
   Pour une fonction croissante, être continue en x revient à avoir la même limite à droite et à gauche : on pose $g(x) = \lim_{y \to x^+} f(y)$ et $d(x) = \lim_{y \to x^-} f(y)$, (ces limites existent car f est croissante), et comme $g(x) \leqslant f(x) \leqslant d(x)$, il suffit de montrer que $g(x) = d(x)$ pour avoir l'égalité des trois termes. On appelle D l'ensemble des points de discontinuité. Pour chaque $x \in D$, on associe un rationnel $q(x)$ dans $]g(x), d(x)[$ (on utilise l'axiome du choix ici, ou on a au préalable numéroté les rationnels, et on prend celui qui convient avec le plus petit numéro, mais là ça devient du pinaillage). Comme f est croissante, si $x < y \in D$, alors $d(x) \leqslant g(y)$ et donc $q(x) < q(y)$. La fonction q est donc une injection de D dans $\mathbb{Q}$, et donc D est au plus dénombrable.
2. À x fixé, montrer que l'accroissement fini à gauche (entre x et $y < x$) est croissant et borné (par l'accroissement fini) entre x est b. De même le taux de variation à droite est croissant et borné par celui entre a et x. Passer à la limite à gauche et à droite, puis utiliser le point précédent pour par exemple f'_g, qui est croissante (et utiliser le fait que $f'_d(x) \geqslant f'_g(x)$ en tout point de $]a, b[$).

3. Il faut d'abord considérer l'ensemble M_f des images des points où une fonction réelle f quelconque (pas forcément continue) admet un maximum local. En effet, pour chaque image $y \in M_f$, on peut associer un petit intervalle ouvert I_y tel que y est le maximum absolu de f sur I_y. On peut prendre I_y de la forme $]a_y, b_y[$ avec a_y et b_y dans $\mathbb{Q}$ (pareil qu'au dessus, il faut faire attention avec l'axiome du choix si on est titilleux). De plus si $y \neq z \in M_f$, on ne peut pas avoir $a_y = a_z$ et $b_y = b_z$, sinon $z = \sup_{x\in]a_z,b_z[} f(x) = \sup_{x\in]a_y,b_y[} f(x) = y$. L'application $y \mapsto (a_y, b_y)$ est donc injective de M_f dans $\mathbb{Q}^2$, et donc M_f est dénombrable.

   On peut faire exactement la même chose avec l'ensemble m_f des valeurs minimales locales.

   Si on revient à notre fonction continue f, elle admet un extremum local partout, ce qui implique que $f(\mathbb{R}) = M_f \cup m_f$, qui est donc dénombrable. Or $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, ce n'est donc possible que si c'est un singleton.

Exercice 26. On suppose l'existence d'une telle fonction f. Comme elle est dérivable, elle est continue, et l'image de $\mathbb{R}$ est un intervalle I, disons $I = (a, b)$ les bornes pouvant être infinies, fermées ou ouvertes. Si c'est un singleton ($I = \{y\}$) alors f est constante, et on voit que c'est bien une solution.

Sinon si $a < b$, on a déjà $f|_{(a,b)} = Id$, en effet, si $x \in (a, b)$, alors $x = f(y)$ pour un certain $y \in \mathbb{R}$, et alors $f(x) = f \circ f(y) = f(y) = x$. Supposons que l'une des bornes est finie, par exemple a. On a par continuité $f(a) = a$, et on peut calculer $f'(a) = f'_d(a) = 1$. Et $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0$ pour $h < 0$ puisque $f(a+h) \geqslant a = f(a)$. Donc $f'(a) = f'_g(a) \leqslant 0$, ce qui est impossible, donc $a = -\infty$. De la même manière $b = +\infty$, et donc $f = Id$. Cette fonction convient, et c'est donc la seule qui ne soit pas constante.

Exercice 27. En posant $S(f, n, a, h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(a+kh)$, on veut donc montrer que si $f \in C^n(]a, a+nh[)$ et $f \in C^0([a, a+nh])$, alors il existe $c \in]a, a+nh[$ tel que $S(f, n, a, h) = (-1)^n h^n f^{(n)}(c)$. Le cas $n = 1$ est exactement le théorème des accroissement finis. On suppose donc que c'est vrai au rang $n-1$, pour $n \geqslant 2$. On calcule :

$$\begin{aligned}
S(f, n, a, h) &= f(a) + (-1)^n f(a+nh) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] f(a+kh) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} f(a+kh) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} f(a+kh) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} f(a+kh) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} f(a+h+(k-1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} [f(a+kh) - f(a+h+kh)],
\end{aligned}$$

c'est à dire l'expression de $S(g, n-1, a, h)$, où $g(x) = f(x) - f(x+h)$, qui est bien de classe C^{n-1} sur $]a, a+(n-1)h[$ et continue sur $[a, a+(n-1)h]$.

Par récurrence, on obtient donc que $S(f, n, a, h) = S(g, n-1, a, h) = (-1)^{n-1} h^{n-1} g^{(n-1)}(c)$, où $c \in]a, a+(n-1)h[$. Mais comme $g^{(n-1)}(c) = f^{(n-1)}(c) - f(n-1)(c+h)$ et que $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $[c, c+h]$, le théorème des accroissement finis nous donne $\widetilde{c} \in]c, c+h[$ tel que $f^{(n-1)}(c) - f(n-1)(c+h) = -hf^{(n)}(\widetilde{c})$, et donc $S(f, n, a, h) = (-1)^n h^n f^{(n)}(\widetilde{c})$.

Exercice 28. Obtenir d'abord l'injectivité, donc la monotonie, puis trouver les limites en $\pm\infty$ (suivant le sens de monotonie), avec l'inégalité triangulaire renversée.

Exercice 29.

1. On écrit que $\frac{f}{g} \to 1$ donc $\ln f - \ln g \to 0$, donc on peut diviser par $\ln g$, la limite est toujours 0 (puisque $\ln g \to +\infty$, en fait on avait simplement besoin que $\ln g$ ne s'approche jamais de 0), et donc $\frac{\ln f}{\ln g} - 1 \to 0$, ce qu'on voulait.
2. On doit trouver e.

Exercice 30.

1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. On prend $x \mapsto x^2$. On a par exemple $\varepsilon = 1$. Soit $\delta > 0$, on veut trouver x et y tels que $|y - x| < \delta$ et $|f(y) - f(x)| \geqslant 1$. Il suffit de chercher par exemple y sous la forme $x + \frac{1}{2}\delta$ (et de trouver un x qui conviennent). On a alors $f(y) - f(x) = x^2 + \delta x + \frac{1}{4}\delta^2 - x^2 = \delta x + \frac{1}{4}\delta^2$. En prenant $x = \frac{1}{\delta}$, on obtient donc bien $f(y) - f(x) = 1 + \frac{1}{4}\delta^2 \geqslant 1$.
3. Une fonction continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$. On peut le faire par contraposée : si elle n'est pas uniformément continue, on peut prendre $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x et y dans $[a, b]$ tels que $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut choisir x_n, y_n dans $[a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers un $x \in [a, b]$. Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \to 0$, on a aussi que $(y_{\varphi(n)})$ tend vers x. Et donc si f était continue en x, on devrait avoir $f(x_{\varphi(n)}) \to f(x)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to f(x)$, donc à partir d'un certain rang $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| < \varepsilon$, ce qui donne une contradiction.
4. On écrit, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < 1$.
   On fait alors par petits bouts, en écrivant que $x = n\delta + h$, avec $0 \leqslant h < \delta$ (on veut donc n tel que $\frac{x}{\delta} = n + \frac{h}{\delta} \in [n, n+1[$, on prend donc n la partie entière de $\frac{x}{\delta}$). On écrit alors
   $$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= f(x) - f(n\delta) + f(n\delta) - f((n-1)\delta) + \cdots + f(\delta) - f(0) \\ &\leqslant |f(x) - f(n\delta)| + |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + \cdots + |f(\delta) - f(0)| \\ &\leqslant (n+1)\varepsilon \leqslant \frac{x}{\delta} + 1. \end{aligned}$$
   On obtient donc bien le résultat voulu, avec $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = 1 + f(0)$. ♣ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant ax + b.$$
5. On prend f définie comme une fonction affine par morceaux valant n en n, et $n+1$ en $n + \frac{1}{n+1}$. Elle est donc constante sur $[n + \frac{1}{n+1}, n+1]$, et de pente $n+1$ sur $[n, n + \frac{1}{n+1}]$. On a bien $f(x) \leqslant x + 1$ pour tout x. Pourtant, pour $\varepsilon = 1$, si on prend $\delta > 0$, dès que $\frac{1}{n+1} < \delta$, en prenant $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n+1}$, on a $f(y_n) - f(x_n) = 1$ et $|x_n - y_n| = \frac{1}{n+1} < \delta$.

Exercice 31.

1. On suppose l'existence d'une telle fonction f, et on commence par montrer qu'elle est périodique de période $2i\pi$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $e^{f(z+2i\pi)} = f \circ f \circ f(z + 2i\pi) = f(e^{z+2i\pi}) = f(e^z) = f \circ f \circ f(z) = e^{f(z)}$, donc on obtient que $f(z+2i\pi) = f(z) + 2ik_z\pi$, où $k_z \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, on a une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $k : z \mapsto \dfrac{f(z + 2i\pi) - f(z)}{2i\pi}$. Elle est donc constante (pour le montrer, si $k(a) \neq k(b)$, alors l'image de $[0, 1]$ par la fonction réelle continue $t \mapsto k((1-t)a + tb)$, est un intervalle constitué de valeurs entières, qui contient les deux entiers $k(a)$ et $k(b)$, ce qui est absurde).
   On raisonne alors sur l'image de f. Comme l'image de l'exponentielle est $\mathbb{C}^*$, on a d'une part que $\mathbb{C}^* \subset f(\mathbb{C})$, et d'autre part on ne peut pas avoir $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, sinon on aurait $f \circ f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Donc $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
   Si k était non nulle, on pourrait donc trouver $a \in \mathbb{C}$, tel que $f(a) = -2ik\pi$, et alors on aurait donc $f(a + 2i\pi) = 0$, ce qui est impossible. Donc k est nulle et f est $2i\pi$-périodique.
   On se place donc sur la bande $\mathbb{B} = \mathbb{R} + i[0, 2\pi[$, et on a donc obtenu que $f(\mathbb{B}) = \mathbb{C}^*$. Donc on peut en particulier trouver a et b dans $\mathbb{B}$ tels que leurs images par f diffèrent de $2i\pi$ (au hasard, on peut prendre $f(a) = 12$ et $f(b) = 12 + 2i\pi$). On applique f sur l'égalité $f(b) = f(a) + 2i\pi$, ce qui nous donne $e^b = f(f(a) + 2i\pi) = f(f(a)) = e^a$ (par $2i\pi$-périodicité de f). Mais comme l'exponentielle est injective sur $\mathbb{B}$, on obtient que $a = b$ ce qui est absurde puisque a et b n'ont pas la même image par f.
   En conclusion, une telle fonction f ne peut pas exister.
2. On procède par analyse-synthèse.
   — Analyse.
   Soit f une telle fonction. L'injectivité de l'exponentielle implique l'injectivité de f, et comme f est continue, elle est strictement monotone, et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. L'image de l'exponentielle est $\mathbb{R}_+^*$, donc la relation $f \circ f = \exp$ nous donne que $f(I) = \mathbb{R}_+^*$. Comme $f(I) \subset f(\mathbb{R}) = I$, on a $\mathbb{R}_+^* \subset I$. De plus, on ne peut pas avoir $I = \mathbb{R}$, sinon $f(I) = \mathbb{R}$, et enfin, par l'injectivité de f, on ne peut pas avoir $I = \mathbb{R}_+^*$, sinon, pour $x < 0$ fixé, $f(x)$ est strictement positif, et donc a un antécédent dans $f(I)$, qui est strictement positif et donc différent de x. Au final, $I =]a, +\infty[$, pour un certain $a < 0$.

Si f était décroissante, alors on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, et donc $f(I) =]a, f(a)[\neq \mathbb{R}_+^*$. Donc f est croissante, et on obtient $f(I) =]f(a), +\infty[$, donc $f(a) = 0$. La fonction f induit une bijection continue croissante f_0 de $]-\infty, a]$ dans $]a, 0]$. On va montrer que la connaissance de a et de f_0 suffisent à déterminer f, en « itérant le logarithme ». En effet si on peut écrire $x = \exp^n(y)$ (on note comme ceci la composée n fois de l'exponentielle), alors $f(x) = f(\exp^n(y)) = f^{2n+1}(y) = \exp^n(f(y))$. Donc par exemple si on arrive à avoir un tel y dans $]-\infty, a]$, on connaît $f(y)$ en utilisant simplement f_0. Et si $y \in]a, 0]$, alors $f(y) = f(f(f^{-1}(y))) = \exp(f_0^{-1}(y))$.
Il faut donc montrer que pour tout x, on peut trouver un n et un y tels que $y \leqslant 0$ et $x = \exp^n(y)$. On pose $E_0 =]-\infty, 0]$, et $E_n =]\exp^{n-1}(0), \exp^n(0)]$ pour $n \geqslant 1$. Les E_n pour $n \in \mathbb{N}$ forment une partition de $\mathbb{R}$, et on pose $N(x)$ l'indice tel que $x \in E_{N(x)}$. Et on pose $L(x) = \ln^{N(x)}(x)$ (la composée de ln un nombre $N(x)$ de fois, appliquée en x, qui est bien défini et dans E_0 : par récurrence pour $k \leqslant N(x)$, $\ln^k(x) \in E_{N(x)-k}$). On a donc

$$f(x) = \begin{cases} \exp^{N(x)}(f_0(L(x))) & \text{si} \quad L(x) \in]-\infty, a] \\ \exp^{N(x)+1}(f_0^{-1}(L(x))) & \text{si} \quad L(x) \in]a, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

— Synthèse
Montrons qu'une fonction f définie comme ci-dessus en (1), à partir de $a < 0$ fixé et d'une bijection continue croissante f_0 de $]-\infty, a]$ dans $]a, 0]$, est bien une fonction continue telle que $f \circ f = \exp$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $L(x) \in]-\infty, a]$, comme $\exp^{N(x)}(f_0(L(x))) \in]\exp^{N(x)}(a), \exp^{N(x)}(0)]$, on obtient que $N(f(x)) = N(x)$ et donc $L(f(x)) = f_0(L(x)) \in]a, 0]$. On a donc :
$f(f(x)) = \exp^{N(f(x))+1}(f_0^{-1}(L(f(x)))) = \exp^{N(x)+1}(f_0^{-1}(f_0(L(x)))) = \exp^{N(x)+1}(L(x)) = \exp(x)$.
De la même manière, si $L(x) \in]a, 0]$, alors $N(f(x)) = N(x)+1$, et on obtient ensuite que $L(f(x)) = \ln^{N(x)+1}($e
On a donc :
$f(f(x)) = \exp^{N(f(x))}(f_0(L(f(x)))) = \exp^{N(x)+1}(f_0(f_0^{-1}(L(x)))) = \exp^{N(x)+1}(L(x)) = \exp(x)$.
On a donc bien $f \circ f = \exp$. Pour la continuité, comme f est définie par morceaux, par composition de fonctions continues sur des intervalles de la forme $]\exp^n(a), \exp^n(0)]$ ou $]\exp^n(0), \exp^{n+1}(a)]$ (ou $]-\infty, a]$), il suffit de montrer que f est continue à droite à la borne inférieure de chacun de ces intervalles (sauf pour $]-\infty, a]$, où il n'y a rien à « recoller »). Il suffit de montrer dans le premier cas que (pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit) $f(\exp^n(a+\epsilon)) = \exp^{n+1}(f_0^{-1}(a+\varepsilon)) \to f(\exp^n(a)) = \exp^n(f_0(a)) = \exp^n(0)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui est vrai par composition des limites puisque $(f_0^{-1}(a+\varepsilon)$ tend vers $-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Dans le deuxième cas on se ramène à montrer que (pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit), $f(\exp^n(\epsilon)) = \exp^{n+1}(f_0(\ln\varepsilon)) \to f(\exp^n(0)) = \exp^{n+1}(f_0^{-1}(0)) = \exp^{n+1}(a)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui est vrai aussi puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = a$.

En conclusion, les fonctions recherchées sont exactement celles décrites par l'équation (1), pour $a < 0$ arbitraire et f_0 une bijection continue croissante arbitraire de $]-\infty, a]$ dans $]a, 0]$.
En fait, dans tout ce qui précède, si on ne suppose pas que f est continue, on peut écrire $E_1 = f(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}_+^*$ (ce qui correspond à $]a, 0]$ dans le cas précédent) et $E_2 = \mathbb{R}_- \setminus E_1$ (ce qui correspond à $]-\infty, a]$). On a que E_1 et E_2 forment une partition de $\mathbb{R}_-$ et que f_0 (la restriction de f à E_2) est une bijection de E_2 sur E_1. Tout le reste se construit exactement pareil, en remplaçant $]-\infty, a]$ par E_2 et $]a, 0]$ par E_1.
On a donc que les fonctions recherchées s'écrivent de cette manière, pour E_1 et E_2 arbitraires formant une partition de $\mathbb{R}_-$, et f_0 étant une bijection quelconque entre E_1 et E_2.

2.4 Suites et séries de fonctions

Exercice 32.

1. La suite P_n converge pour la norme $g \mapsto \sup_{x\in A} |g(x)|$ donc elle est de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition et on obtient exactement ce qui est demandé.
2. Un polynôme de degré différent de 0 tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, donc ce n'est pas possible ici, comme A est non borné. On a donc que $P_n - P_{n_0}$ est de degré 0.
3. Donc $P_n = P_{n_0} + c_n$. Et la suite (c_n) doit converger (puisque la suite (P_n) converge uniformément sur A, la suite $(c_n) = (P_n - P_{n_0})$ converge aussi uniformément sur A, ce qui équivaut à ce que (c_n) converge dans $\mathbb{R}$), vers $c \in \mathbb{R}$, donc $f(x) = P_{n_0}(x) + c$ pour $x \in A$.
   Si A est dense, par continuité, on a donc $f(x) = P_{n_0}(x) + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$, puisque $|f(x) - P_n(x)| = |c - c_n|$, indépendamment de $x \in \mathbb{R}$, dès que $n \geqslant n_0$.

Exercice 33. Par composition, f_n est de classe C^1. À n fixé, sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto f_n(x) - |x|$ est décroissante (calculer sa dérivée qui vaut $\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} - 1 < 0$ sur $]0, +\infty[$) et positive, donc $|f_n(x) - |x|| = f_n(x) - |x| \leqslant f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

De même sur $]-\infty, 0]$ par parité de la fonction. Donc en posant $f(x) = |x|$, on a $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. La fonction valeur absolue f est bien continue, mais pas C^1.

Pour faire l'estimation sans l'étude des variations, on pouvait aussi directement écrire

$$f_n(x) - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 34.

1. Utiliser la convergence normale (ainsi que celle de toutes les dérivées) sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, et l'interversion limite/continuité (et dérivabilité).
2. Décroissante, convexe (comme chacune des f_n, tout cela passe bien à la limite : ce sont des inégalités larges à satisfaire). Ou plus simplement $f_n' < 0$ et $f_n'' > 0$, ce qui nous donne la décroissance et la convexité stricte.
3. Interversion série et limite, on obtient $f_n(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ dès que $n > 0$, et $f_0(x) = 1$. Donc la limite est 1.
4. On peut faire à l'aide d'une comparaison série intégrale, puisque pour $n \geqslant 2$ on a $\int_n^{n+1} t^{-x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^n t^{-x}\mathrm{d}t$. Donc en sommant, on obtient $\int_1^{+\infty} t^{-x}\mathrm{d}t \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} t^{-x}\mathrm{d}t$. Après calcul on obtient que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ lorsque $x \to 1^+$.
5. Il faut exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 35. On a, à x fixé, $\ln(f_n(x)) = n\ln(1 - \frac{x}{n}) \sim -x$ lorsque $n \to \infty$ (attention, sauf pour $x = 0\ldots$). Donc $f_n(x) \to e^{-x}$ lorsque $n \to \infty$. Donc (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$. Cependant, en prenant $x_n = (1 - 2^{\frac{1}{n}})n \to \infty$, on a bien $f_n(x_n) = 2$ et si f_n convergeait uniformément, on aurait $|f_n(x_n) - e^{-x_n}| \leqslant \|f_n - f\| \to 0$, or on a $|f_n(x_n) - e^{-x_n}| \to 2$.

Exercice 36.

1. On pose M une borne sur f''. Par la formule de Taylor, on a $f(x + \frac{1}{n}) - f(x) = \frac{1}{n}f'(x) + \frac{1}{2n^2}f''(c)$ avec $c \in]x, x + \frac{1}{n}[$. On obtient donc $|n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)] - f'(x)| = \frac{1}{2n}|f''(c)| \leqslant \frac{M}{2n}$. Autrement dit $\|g_n - f'\|_\infty \leqslant \frac{M}{2n}$.
2. On utilise le fait que f' est uniformément continue sur $[a, b]$ (par le théorème de Heine). Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'à partir d'un certain rang $\|g_n - f'\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (la norme est la norme sup sur $[a, b]$). Comme f' est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| \leqslant \delta$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \varepsilon$. Mais par le théorème des accroissement finis, pour x fixé dans $[a, b]$, on a $g_n(x) = f'(c_n)$ où $c_n \in]x, x + \frac{1}{n}[$. Donc $|x - c_n| < \frac{1}{n}$, et dès que $\frac{1}{n} \leqslant \delta$, on obtient donc que $|g_n(x) - f'(x)| = |f'(c_n) - f'(x)| \leqslant \varepsilon$, et ceci pour tout $x \in [a, b]$. On a donc bien, pour n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \delta$, $\|g_n - f'\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Exercice 37.

1. Pour $x = 1$, le terme général est nul, donc la série converge. Pour $x \in [0, 1[$, la suite (a_n) étant bornée, le terme général est dominé par une série géométrique, donc converge.
2. On étudie la fonction f_n sur $[0, 1]$. Elle est croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$, et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$, son maximum est donc atteint en $\frac{n}{n+1}$ et vaut $a_n(\frac{n}{n+1})^n(1 + \frac{n}{n+1}) = \frac{a_n}{n+1}(1 + \frac{1}{n})^{-n}$. La norme $\|f_n\|_\infty$ vaut donc $\frac{a_n}{n+1}(1 + \frac{1}{n})^{-n} \sim \frac{a_n}{e\ n}$ (en effet la limite de $-n\ln(1 + \frac{1}{n})$ est -1, donc en composant par l'exponentielle, la limite de $(1 + \frac{1}{n})^{-n}$ est e^{-1}). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de fonctions converge normalement si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. On étudie le reste de la série. On prouve que

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k>n} f_n(x) \leqslant a_{n+1} \sum_{k>n} x^k(1 - x) = a_{n+1}x^{n+1} \leqslant a_{n+1},$$

pour $x \in [0, 1[$ (et aussi en $x = 1$ de façon immédiate), car la suite (a_n) est décroissante. Donc si $a_n \to 0$, alors $\|R_n\|_\infty \leqslant a_{n+1}$, donc la série converge uniformément. Réciproquement, si la limite de (a_n) (qui existe puisque la suite est décroissante) vaut $\ell > 0$, alors on a $a_n \geqslant \ell$ pour tout n donc $R_n(x) \geqslant \ell \sum_{k>n} x^k(1 - x) = \ell x^{n+1}$ pour $x \in [0, 1[$. Donc $\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \geqslant \ell$ pour tout n, et la série ne converge pas uniformément.

Exercice 38.

1. En notant D_n l'ensemble des points de discontinuité de f_n et $\widetilde{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, on a que les f_n sont continues sur $]a, b[\backslash\widetilde{D}$, donc leur limite uniforme f aussi. Donc les points de discontinuité de f sont inclus dans $\widetilde{D}$ qui est dénombrable (union dénombrable d'ensemble finis).

2. Cela se démontre exactement de la même manière que le théorème disant que si f_n converge uniformément vers f et f_n est continue en x, alors f est continue, en remplaçant « continue » par « a une limite à gauche » ou « a une limite à droite ».
3. L'idée est de contruire une fonction « en escalier » : si D est fini, la formule $f(x) = \sum_{d \in D} \mathbf{1}_{]d,+\infty[}(x)$ (c'est la fonction qui compte le nombre d'éléments de D strictement plus petits x) donne une fonction qui convient.
Pour pouvoir sommer un nombre dénombrable de fois, on numérote les éléments ($D = \{d_n, n \in \mathbb{N}\}$), et on va donner des hauteurs aux « marches » : On pose $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x)$.
D'abord, c'est bien défini : pour tout x, il s'agit d'une série à termes positifs, et les sommes partielles sont majorées par $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 2$. Cette fonction est bien croissante : c'est une somme de fonctions croissantes (donc les sommes partielles sont croissantes, puis les limites aussi).
Il reste à montrer que cette fonction est continue en dehors de D, et discontinue sur D.
Pour la continuité, on prend $\varepsilon > 0$, et on prend N tel que $2^{-N+1} < \varepsilon$. Soit x n'appartenant pas à D. Comme $D_N = \{d_n, n \in [\![0, N]\!]\}$ est fini et que $x \notin D_N$, on peut trouver un petit intervalle ouvert I qui contient x et qui n'intersecte pas D_N. Pour $n < N$ si on prend $y \in I$, on a donc que $\mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y) = \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x)$. On a donc
$$\begin{aligned} f(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y) &= \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y) + \sum_{n>N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x) + \sum_{n>N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y). \end{aligned}$$
Donc $|f(y) - f(x)| = \left| \sum_{n>N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(y) - \sum_{n>N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x) \right| \leqslant 2^{-N} + 2^{-N} < \varepsilon$
On a donc bien continuité de f en dehors de D.
Pour la discontinuité en d_N, on pose $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x)}{2^n} + \sum_{n>N} 2^{-n} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}(x)$, et donc de la même manière que précédemment, g_N est une fonction croissante, et $f = g_N + 2^{-N} \mathbf{1}_{]d_n,+\infty[}$, donc pour $x > d_n$, on obtient $f(x) = g_N(x) + 2^{-N} \geqslant g_N(d_N) + 2^{-N} = f(d_N) + 2^{-N}$. Donc en aucun cas on ne peut avoir $f(x) \to f(d_N)$ quand $x \to d_N, x > d_N$. La fonction n'est donc pas continue à droite. (en fait on peut voir qu'elle l'est à gauche...)

Exercice 39.

1. Ici, pour simplifier, on se ramène au cas du segment $[0,1]$ par un changement de variable affine. La fonction f est continue, donc uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit M assez grand pour que si $|x - y| \leqslant \frac{1}{M}$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On pose $x_i = \frac{i}{M}$, et on prend N tel que $\forall n \geqslant N, \forall i \in [\![0, M]\!], |f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$.
Alors si $x \in [0,1]$, on prend $i \in [\![0, M[\![$ tel que $x \in [x_i, x_i + 1]$ et on a pour $n \geqslant N$, par croissance de f_n, que $f_n(x) \in [f_n(x_i), f_n(x_{i+1})] \subset [f(x_i) - \varepsilon, f(x_{i+1}) + \varepsilon]$. Mais $|f(x) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$ et , $|f(x) - f(x_{i+1})| \leqslant \varepsilon$ (par uniforme continuité) et donc $[f(x_i) - \varepsilon, f(x_{i+1}) + \varepsilon] \subset [f(x) - 2\varepsilon, f(x) + 2\varepsilon]$. Donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ et ce pour tout x dans $[0,1]$. La convergence est donc bien uniforme.
2. On se ramène au cas ou $f = 0$: on pose $g_n = f - f_n$, on a donc g_n une suite de fonctions continues positives qui converge simplement vers la fonction nulle sur $[a,b]$, en décroissant. Comme ces fonctions sont continues sur un compact, elles atteignent leur maximum en un point x_n de $[a,b]$. On a $\|g_{n+1}\|_\infty = g_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant g_n(x_{n+1}) \leqslant \|g_n\|_\infty$, donc la suite $(\|g_n\|_\infty)$ est décroissante et positive, converge en décroissant vers un $\ell \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors on pose $K_n = \{x \in [a,b], g_n(x) \geqslant \frac{\ell}{2}\} = g_n^{-1}([\frac{\ell}{2}, +\infty[)$, qui est donc un fermé inclus dans le compact $[a,b]$, donc un compact (non vide puisque $\|g_n\|_\infty \geqslant \ell$). Si $x \in K_{n+1}$ alors $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$ donc $x \in K_n$. On a donc affaire à une suite décroissante de compacts non vides, dont l'intersection est non vide (voir l'exercice 14, ou alors dans le cas d'un segment, poser $\alpha_n = \inf(K_n)$, montrer que $\alpha_n \in K_p$ pour $p \leqslant n$ et que (α_n) est croissante et admet une limite α qui est dans tous les K_p). Si x est dans cette intersection, alors $g_n(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc à la limite, $0 = g(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$, d'où la contradiction.

Exercice 40.

1. Pour chaque $x \in [0,1]$, on sait que $d(\mathbf{1}_x, 0) > 0$, donc il existe un entier n tel que $d(\mathbf{1}_x, 0) \geqslant \frac{1}{n}$. On note $N(x)$ le plus petit de ces entiers.

   On a donc que pour tout x, $\mathbf{1}_x \in C_{N(x)}$. Si chacun des C_n ne contenait qu'un nombre fini de fonctions de la forme $\mathbf{1}_x$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ n'en contiendrait qu'un nombre dénombrable, mais par ce qui précède, cet ensemble les contient toutes (et elles sont en nombr e indénombrable puisque $[0,1]$ n'est pas dénombrable). Il existe donc un C_{n_0} qui en contient une infinité.

2. On note $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ une infinité d'éléments distincts deux à deux tels que $\mathbf{1}_{x_n} \in C_{n_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons alors que la suite de fonctions $(\mathbf{1}_{x_n})$ converge simplement vers 0. Pour $x \in [0,1]$, si x n'est pas de la forme x_n pour un $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(\mathbf{1}_{x_p}(x))$ vaut 0 pour tout p. Et si x est de la forme x_n pour $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(\mathbf{1}_{x_p}(x))$ vaut 0 sauf pour $p = n$, donc elle converge également vers 0.

3. S'il existait une telle distance, on aurait $d(\mathbf{1}_{x_n}, 0) \to 0$ quand $n \to \infty$, mais d'après la première question on a toujours $d(\mathbf{1}_{x_n}, 0) \geqslant \frac{1}{n_0}$, ce qui est une contradiction.

4. Il faut d'abord bien vérifier que la série est bien définie (dominée par une série géométrique). Les autres axiomes de la distance se vérifient facilement.

   Pour montrer l'équivalence avec la convergence simple, on a déjà que $\widetilde{d}(f_n, f) \geqslant \frac{1}{2^p}\max(|f_n(x_p) - f(x_p)|, 1)$, donc si $d(f_n, f)$ tend vers 0, alors la suite $|f_n(x_p) - f(x_p)|$ doit tendre aussi vers 0. Comme ceci est valable pour tout p, on obtient bien que la suite de fonctions f_n converge simplement vers f.

   Pour le sens réciproque, si on suppose que toutes les suites $(f_n(x_p))$ convergent vers $f(x_p)$, on prend $\varepsilon > 0$, et on fixe p_0 tel que $\sum_{p>p_0} \frac{1}{2^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p}\max(|f_n(x_p) - f(x_p)|, 1) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (c'est une somme finie de termes qui tendent vers 0), on peut trouver un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ cette somme est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Et donc pour $n \geqslant n_0$, on a

$$\widetilde{d}(f_n, f) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p}\max(|f_n(x_p) - f(x_p)|, 1) \leqslant \sum_{p=0}^{p_0} \frac{1}{2^p}\max(|f_n(x_p) - f(x_p)|, 1) + \sum_{p>p_0} \frac{1}{2^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$