Notions Fondamentales L1–L2
Feuille d'exercices n^o 1 (2017) — Éléments de correction.

1 Retour aux bases

1.1 Symboles, français et rédaction

Exercice 1.

1. Faux. Prenons $x = -1$, $y = 1$, on a bien $x, y \in \mathbb{R}^*$, $x < y$ et $-1 = \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{y} = 1$. L'erreur que l'on aurait pu faire est d'avoir une dérivée négative, donc d'en déduire que la fonction est décroissante, ce qui est vrai sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
2. Vrai. Prenons $x = \frac{1}{4}$ alors $\sqrt{x} = \frac{1}{2} > x$.
3. Vrai. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Prenons $n = N$. On a bien $n \in \mathbb{N}^*$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n = N$.

Exercice 2.

1. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant M$,
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(y)$,
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, [f(x) = 0 \text{ et } f(y) = 0] \Rightarrow x = y$,
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ ou $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.

Exercice 3. On a donc $\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$ quelle que soit la fonction continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$. On pose $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ce qui définit bien une fonction continue. On a donc $\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))^2\mathrm{d}x = 0$, et comme le terme sous l'intégrale est une fonction positive et continue, alors il est nul partout. On a donc pour tout $x \in [0,1], (f_1(x) - f_2(x))^2 = 0$, c'est à dire $f_1(x) = f_2(x)$.

1.2 Logique et raisonnements

Exercice 4.

1. Sens direct. Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ ou $Q(x)$. Prenons un tel x. Alors soit on a $P(x)$, dans ce cas on a bien l'existence d'un $x \in E$ tel que $P(x)$, soit on a $Q(x)$ et dans ce cas on a bien l'existence d'un x tel que $Q(x)$.

   Pour le sens réciproque, supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ ou qu'il existe $x \in E$ tel que $Q(x)$. Dans le premier cas, si on prend un tel x il vérifie $P(x)$, donc il vérifie $[P(x) \text{ ou } Q(x)]$, et donc on a bien l'existence d'un $x \in E$ tel que $[P(x) \text{ ou } Q(x)]$. De même dans le deuxième cas, si on prend un tel x il vérifie $Q(x)$, donc il vérifie aussi $[P(x) \text{ ou } Q(x)]$, et donc on a bien l'existence d'un x qui vérifie $[P(x) \text{ ou } Q(x)]$. Dans les deux cas on a obtenu la proposition à gauche du signe équivalent.
2. Le sens direct est encore bon. Pour le sens réciproque, prendre par exemple $E = \mathbb{R}$, $P(x)$ la proposition « $x \geqslant 1$ » et $Q(x)$ la proposition « $x \leqslant -1$ ».
3. Il suffit d'écrire la proposition du 1. appliquée aux propositions non(P) et non(Q), puis de nier les deux côtés de l'équivalence.
4. En écrivant les négations et utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\text{non}(\exists x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ [P(x) \text{ et non}(Q(x))]\\ &\Leftrightarrow [\forall x \in E,\ P(x)] \text{ et } [\forall x \in E,\ \text{non}(Q(x))]\\ &\Leftrightarrow [\forall x \in E,\ P(x)] \text{ et } [\text{non}(\exists x \in E,\ Q(x))].\end{aligned}$$

Exercice 5. Écrire d'abord la définition de « f non monotone » :

$$[\exists x, y \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) < f(y)] \text{ et } [\exists x, y \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) > f(y).$$

Réécrire ceci en utilisant que les variables de la fin sont muettes, sous la forme

$$\exists x, y, z, t \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) < f(y) \text{ et } z < t \text{ et } f(z) > f(t).$$

Sous cette forme, il est plus facile de voir comment obtenir l'équivalence avec la formule donnée dans l'exercice en distinguant les cas. Par exemple pour le sens réciproque, prendre les x, y, z donnés par la proposition de l'exercice, et construire dans les deux cas ($f(x) < f(y) > f(z)$ ou $f(x)| > |f(y)| < |f(z)$) deux paires x', y' et z', t' qui fonctionnent pour l'énoncé ci-dessus. De même pour le sens direct, si l'énoncé ci-dessus est vrai, raisonner par cas suivant si $x < y < z < t$, si $x < z < y < t$, si $x < z < t < y$, si $z < x < y < t$, si $z < x < t < y$, si $z < t < x < y$ (les six cas possibles) et trouver à chaque fois trois réels x', y', z' qui satisfont la proposition de l'exercice.

Exercice 6. On pose $y = \sqrt{2}$. Alors soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, et on a trouvé ce qu'on voulait, avec $y = x$, tous les deux irrationnels, soit il n'est pas rationnel, et on pose alors $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ qui est donc irrationnel, et on a $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^2 = 2$ qui est bien rationnel. Notez que l'on n'a déterminé nulle part si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ était rationnel ou pas. On a juste examiné les deux cas possible et dans les deux cas obtenu l'existence d'un x et d'un y irrationnels tels que x^y est rationnel. On ne peut pas statuer sur quel x et quel y convient, mais on sait qu'il en existe.

Pour la petite histoire, il existe en fait un théorème (difficile), le théorème de Gelfond-Schneider (wikipedia est votre amie), qui permet de montrer que $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est en effet irrationnel (et même transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels).

Exercice 7. Démontrer l'hérédité de la récurrence revient à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E\left(\frac{n^2}{3}\right) + E\left(\frac{2(n+1)}{3}\right) = E\left(\frac{(n+1)^2}{3}\right),$$

ce que l'on peut faire en distinguant les cas, selon que n est de la forme $3p$, $3p+1$ ou $3p+2$.

Exercice 8. Pour l'hérédité : si f est croissante de $[\![1, n+1]\!]$ dans lui-même, on distingue deux cas. Tout d'abord si $f(n+1) = n+1$ il n'y a rien à prouver. Sinon $f(n+1) \leqslant n$ et donc $f(i) \leqslant f(n+1) \leqslant n$ pour $i \leqslant n$, et donc $f|_{[\![1,n]\!]}$ satisfait l'hypothèse de récurrence, et a donc un point fixe.

Exercice 9. Analyse : si $f(x) = p(x) + i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec p paire et i impaire, alors on écrit que $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En sommant et soustrayant, ont obtient que $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, et que $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$. On n'a donc pas le choix pour p et i, qui sont uniquement déterminées par f.

Synthèse, en posant i et p les fonctions définies par les formules précédentes, on vérifie bien que i est impaire, que p est paire, et que leur somme vaut f.

Exercice 10.

1. Pour l'analyse, fixer y et dériver par rapport à x. On obtient que la dérivée est constante, donc que f est de la forme $f(x) = ax+b$. Comme $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0) = 2f(0)$, on en déduit que $b = f(0) = 0$. Donc $f(x) = ax$. La synthèse est immédiate.
2. L'idée est de faire pas à pas (toujours pour l'analyse), pour montrer que $f(x) = f(1)x$:
   — d'abord pour $x \in \mathbb{N}$,
   — puis pour $x \in \mathbb{Z}$,
   — puis pour x de la forme $\frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   — puis pour $x \in \mathbb{Q}$,
   — enfin pour $x \in \mathbb{R}$ par passage à la limite ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).
3. L'astuce ici est de montrer d'abord, en utilisant $f(\alpha x) = f(\alpha)x$ dès que $x \in \mathbb{Q}$, que f est alors continue en 0. La continuité partout s'obtient alors facilement avec la propriété d'addition, et on retombe sur le point précédent.

1.3 Ensembles

Exercice 11.

1. $\{n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 7p\}$, ou $\{7p, p \in \mathbb{N}\}$.
2. $\{x \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N}, 3^k x \in \mathbb{Z}\}$, ou $\{\frac{p}{3^k}, p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.
3. $\{n \in \mathbb{Z}, \exists a, b \in \mathbb{Z}, n = a^2 + b^2\}$, ou $\{a^2 + b^2, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Exercice 12.

1. Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc $x_1 = x_2$.
2. Si $a \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = a$. Donc en posant $b = f(x)$, on a $g(b) = a$.
3. Si $a \in G$, alors il existe $b \in F$ tel que $g(b) = a$. Puis il existe $x \in E$ tel que $f(x) = b$. Donc $g \circ f(x) = a$.
4. Si $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, alors par injectivité de g, $f(x_1) = f(x_2)$, puis $x_1 = x_2$ par injectivité de f.
5. Pour la question 1 : $f(x) = x$, et $g(x) = 0$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour la question 2 : $f(x) = 0$ et $g(x) = x$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour les questions 3 et 4, le même contrexemple fonctionne, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $f(n) = n + 1$ (pas surjective), et $g(n) = n - 1$ si $n \geqslant 1$, et $g(0) = 0$ (pas injective). Alors $g \circ f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $g \circ f$ est bijective (donc surjective et injective).

Exercice 13. Montrons la réflexivité : si $x \in E = U_{i \in I} A_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Donc $x \in A_i$ et $x \in A_i$, donc $x \mathcal{R} x$.

Symétrie : x et y jouent le même rôle dans la définition.

Transitivité. Soient x, y, z dans E. On suppose que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors il existe $i \in I$ tel que x et y soient dans A_i, et $j \in I$ tel que y et z soient dans A_j. On ne peut pas avoir $i \neq j$ car sinon $y \in A_i \cap A_j = \emptyset$. Donc $i = j$ et donc $z \in A_i$, et on obtient bien $x \mathcal{R} z$.

Finalement si $x \in A_i$, alors $y \mathcal{R} x$ équivaut à ce qu'il existe un j tel que $x \in A_j$ et $y \in A_j$. Ce j ne peut donc être que égal à i, sinon $x \in A_j \cap A_i = \emptyset$. et donc $y \mathcal{R} x$ équivaut à $y \in A_i$, autrement dit $\bar{x} = A_i$.

Exercice 14.

1. Relation d'équivalence du type $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Les classes d'équivalences sont les cercles centrés en 0 (le singleton $\{0\}$, réduit à un point est aussi une classe d'équivalence).
2. Idem, si on pense à la fonction « avoir la même partie imaginaire ». Les classes d'équivalence sont les droites horizontales.
3. Il faut montrer que c'est une classe d'équivalence à la main (mais c'est rapide). Les classes d'équivalence sont les droites passant par 0 mais où on a retiré le point 0, et le singleton $\{0\}$.

Exercice 15. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

1. si $x' = x + 2k\pi$ et $y' = y + 2\ell\pi$, avec $k, \ell \in \mathbb{Z}$, alors $x + y = x' + y' + 2(k + \ell)\pi$. Donc $(x + y)\mathcal{R}(x' + y')$.
2. L'analyse est immédiate : pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $\theta = \bar{x}$ et $\varphi = \bar{y}$, et donc on n'a pas le choix si on veut définir $\theta \bar{+} \varphi$, cela doit être égal à $\overline{x + y}$ si on veut avoir la propriété.

   Synthèse : pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$, on veut définir $\theta \bar{+} \varphi$ par $x \bar{+} y$ si $\theta = \bar{x}$ et $\varphi = \bar{y}$. Pour dire que c'est bien une application, il faut montrer que cette définition ne dépend pas des représentants choisis pour θ et φ. Et comme pour d'autres représentants x' et y', on a que $(x + y)\mathcal{R}(x' + y')$, ceci nous donne bien que $\overline{x' + y'} = \overline{x + y}$. Donc l'application $\bar{+}$ est bien définie de $\mathbb{R}/\mathcal{R} \times \mathbb{R}/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, et vérifie bien que si $x, y \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \bar{+} \bar{y} = \overline{x + y}$ (et ce de manière unique).
3. On a que si $x \mathcal{R} x'$, alors $x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $f(x') = e^{ix'} = e^{i(x + 2k\pi)} = e^{ix} = f(x)$, autrement dit f passe au quotient de la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   La propriété sur $\bar{f}$ se fait en passant par les représentants : si $\varphi = \bar{x}$ et $\theta = \bar{y}$, alors

   $$\bar{f}(\theta \bar{+} \varphi) = \bar{f}(\bar{x} \bar{+} \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x + y}) = f(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \times e^{iy} = f(x) \times f(y) = \bar{f}\bar{x} \times \bar{f}\bar{y} = \bar{f}(\theta) \times \bar{f}(\varphi).$$

   Enfin pour la bijection, on sait que si $z \in \mathcal{U}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{ix} = f(x) = \bar{f}(\bar{x})$ (donc $\bar{f}$ est surjective). Et pour l'injectivité, si $\bar{f}(\theta) = \bar{f}(\varphi)$, alors pour x, y tels que $\theta = \bar{x}$ et $\varphi = \bar{y}$, on obtient que $f(x) = f(y)$ soit $e^{ix} = e^{iy}$, donc que $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc que $x \mathcal{R} y$, c'est à dire que $\bar{x} = \bar{y}$, soit encore $\theta = \varphi$.

Exercice 16.

1. On le montre par récurrence sur n (le cardinal commun). Pour $n = 1$, comme F et E sont en bijection avec $\{1\}$, on obtient que ce sont des singletons : $F = \{x\}$ et $E = \{y\}$. Et comme $E \subset F$, on obtient que $y \in F$, donc $y = x$, puis donc $E = F$.

   Pour l'hérédité, on va montrer un petit résultat intermédiaire (qui paraît évident) : si A est un ensemble fini de cardinal $n+1$ avec $n \geqslant 1$ et que $a \in A$, alors $A \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal n. En effet on sait qu'il existe une bijection $f : A \to [\![1, n+1]\!]$. En notant g la restriction de f à $A \setminus \{a\}$ (au départ) et à $[\![1, n+1]\!] \setminus \{k\}$ (à l'arrivée), on obtient bien que g est toujours une bijection. Si on compose par la bijection $\sigma : [\![1, n+1]\!] \setminus \{k\} \to [\![1, n]\!]$ définie par $\sigma(i) = i$ si $1 \leqslant i < k$ et $\sigma(i) = i - 1$ si $k < i \leqslant n+1$, alors on obtient bien une bijection $\sigma \circ g$ entre $A \setminus \{a\}$ et $[\![1, n]\!]$.

   Supposons donc que la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$. On prend alors E et F des ensembles finis de cardinal $n+1$ avec $E \subset F$. Comme E est de cardinal $n+1$, il contient au moins un élément (penser à $f(1)$ par exemple si f est une bijection entre $[\![1, n+1]\!]$ et E), que l'on note x, qui appartient donc aussi à F. On a donc d'après le résultat intermédiaire $E \setminus \{x\}$ et $F \setminus \{x\}$ qui sont tous deux de cardinal n. Comme le premier est inclus dans l'autre, ils sont égaux, et comme $x \in E$ et $x \in F$, alors E et F sont égaux aussi.
2. On a, en restreignant l'espace d'arrivée, que $f(E)$ est en bijection avec E, donc de même cardinal, et est inclus dans F, donc d'après la première question $f(E) = F$ et donc f est surjective.
3. L'idée est de construire une « injection réciproque ». On peut par exemple se ramener au cas où $E = [\![1, n]\!]$ par composition avec une bijection. On pose alors $g(y) = \min\{i \in [\![1, n]\!], f(i) = y\}$. On a donc créé une fonction g de F dans $[\![1, n]\!]$ (bien définie, puisque f est surjective donc on prend le toujours le minimum d'un ensemble non-vide de $[\![1, n]\!]$, ce qui est bien valide), qui vérifie $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in F$. Par conséquent g est injective (puisque $f \circ g$ bijective, donc injective) de F dans $[\![1, n]\!]$, et d'après la question précédente, g est donc bijective. Comme $f \circ g$ est bijective, on en déduit que f est bijective.

   Remarque : ici on a pu construire réellement g telle que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in F$. En règle générale ce n'est faisable pour un ensemble F quelconque qu'en utilisant l'axiome du choix (cette propriété est même en fait équivalente à l'axiome du choix, une telle fonction g telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est appelée « section » de la surjection f).

Exercice 17. La preuve en français et en une phrase serait « si tout le monde serre un nombre différent de mains, comme il y a n possibilités pour ce nombre ($0, 1, \dots, n-1$), il y a forcément une personne qui serre 0 mains (donc ne serre la main à personne) et une autre qui en serre $n-1$, c'est à dire qui serre la main à tout le monde, ce qui est en contradiction ».

Si on veut voir ça en terme mathématiques (et en utilisant les théorèmes sur les ensembles finis), on commence par traduire l'énoncé : on numérote les personnes de 1 à n, et on définit $A_i \subset [\![1, n]\!]$ l'ensemble des personnes à qui i serre la main. Les hypothèses sur les ensembles correspondant à la phrase en français « des gens qui se serrent la main ou pas » sont donc que $i \notin A_i$ (on ne se serre soi-même pas la main), et que si $i \in A_j$ alors $j \in A_i$ (i et j se serrent la main).

On veut donc montrer qu'il existe deux ensembles A_i et A_j qui ont le même cardinal, autrement dit que la fonction $i \mapsto \mathrm{card}(A_i)$ (de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![0, n-1]\!]$) n'est pas injective. Si elle l'était, on aurait alors d'après l'exercice 16 qu'elle serait bijective, donc qu'il existe i tel que $\mathrm{card}(A_i) = n-1$ et qu'il existe j tel que $\mathrm{card}(A_j) = 0$ (autrement dit que $A_j = \emptyset$). Donc comme $A_i \subset [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ et que ces deux ensembles ont le même cardinal, on a bien que $A_i = [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ (qui est donc non vide, on a donc $i \neq j$). En particulier $j \in A_i$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse qu'alors $i \in A_j$, puisque A_j est vide.

Exercice 18.

1. La transposition $\tau_{i,j}$ est évidemment bijective, sa réciproque étant elle-même. Ensuite pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, le seul cas pour lequel $\tau_{1,2}(i) > \tau_{1,2}(j)$ est lorsque $i = 1$ et $j = 2$. Il n'y a donc qu'un terme -1 dans le produit définissant $\varepsilon(\tau_{1,2})$ (tous les autres sont des 1), qui vaut donc -1.
2. L'idée est de prendre un $\ell \in [\![1, n]\!]$, et de calculer $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}(\ell)$ pour voir que l'on obtient bien $\tau_{j,k}(\ell)$ à chaque fois. Il y a 4 cas à traiter :
   — si $\ell = i$, alors $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}(i) = \tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}(k) = \tau_{i,k}(k) = i$, ce qui est bien la même chose que $\tau_{j,k}(i)$.
   — si $\ell = j$, alors $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}(j) = \tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}(j) = \tau_{i,k}(i) = k$, ce qui est bien la même chose que $\tau_{j,k}(j)$.
   — si $\ell = k$, alors $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}(k) = \tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}(i) = \tau_{i,k}(j) = j$, ce qui est bien la même chose que $\tau_{j,k}(k)$.
   — si $\ell \neq i, j, k$, alors $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}(\ell) = \tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}(\ell) = \tau_{i,k}(\ell) = \ell$, soit la même chose que $\tau_{j,k}(\ell)$.
   En passant à la signature, on obtient donc que $\varepsilon(\tau_{i,k}) \cdot \varepsilon(\tau_{i,j}) \cdot \varepsilon(\tau_{i,k}) = \varepsilon(\tau_{j,k})$, soit encore $\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{j,k})$. En prenant donc en particulier $j = 1$, $k = 2$ et $i > 2$, on obtient $\varepsilon(\tau_{i,1}) = \varepsilon(\tau_{1,2})$ (ce qui était ce qu'on voulait puisque $\tau_{i,1} = \tau_{1,i}$). Ensuite si on prend $k = 1$ et $i \neq j$ avec $i, j \neq 1$, on obtient bien $\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{j,1})$,

soit la deuxième chose demandée (en inversant le rôle de i et j). Enfin, en combinant les deux, on obtient dans tous les cas que $\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$ pour n'importe quels $i \neq j$.

3. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ il n'y a que l'identité, qui est bien par convention la composition de 0 transpositions… Pour $n = 2$, les deux seules permutations sont l'identité de $[\![1, 2]\!]$ (qui compte comme 0 transpositions) et la permutation $\tau_{1,2}$, donc on obtient bien toute permutation comme la composition d'au plus une transposition.

   On suppose que la propriété est vraie au rang n, et on prend $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$. On regarde alors ce que vaut $\sigma(n+1)$.

   Si $\sigma(n+1) = n+1$, alors la restriction de σ à $[\![1, n]\!]$ est une permutation de $\mathcal{S}_n$, et s'écrit comme composition de m transpositions $\tau_{i,j}$ de $\mathcal{S}_n$. Si on prend les mêmes transpositions, vues comme permutations de $\mathcal{S}_{n+1}$, leur composition, restreinte à $[\![1, n]\!]$ donnera bien la restriction de σ à $[\![1, n]\!]$, et l'image de $n+1$ restera $n+1$ (aucun des indices des transpositions ne vaut $n+1$). Donc leur composition est exactement σ.

   Enfin, si $\sigma(n+1) = j$, avec $j \in [\![1, n]\!]$, si on écrit $\varphi = \tau_{j,n+1} \circ \sigma$, alors $\varphi(n+1) = n+1$, et par l'étude qu'on vient de faire, φ est la composition de m transpositions (avec $m \leqslant n-1$). En composant à gauche par $\tau_{j,n+1}$, qui est sa propre bijection réciproque, on obtient que $\sigma = \tau_{j,n+1} \circ \varphi$, ce qui est bien la composition de $m+1$ transpositions (avec $m+1 \leqslant n$).

   Évidemment, chaque transposition étant de signature -1, la composition est donc de signature $(-1)^m$.

4. On utilise le résultat des deux dernières questions, en écrivant toutes les transpositions $\tau_{i,j}$ de la décomposition comme $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$. On remplace donc chaque transposition par 3 transpositions (ou on la laisse telle quelle si elle est déjà de la forme $\tau_{1,i}$), ce qui donne donc au plus $3m$ transpositions, avec $m \leqslant n-1$. Sinon pour montrer par récurrence qu'on peut le faire avec $2n-3$ transpositions au maximum (pour $n \geqslant 2$), on procède comme précédemment. C'est vrai pour $n = 2$, puisque dans ce cas-là $2n-3 = 1$, et que la seule transposition $\tau_{1,2}$ est de la forme voulue. Si c'est vrai au rang n et si $\sigma(n+1) = n+1$, on fait exactement comme précédemment et on obtient une décomposition en moins de $2n-3$ transpositions de la forme voulue. Et si $\sigma(n+1) = j$ on écrit cette fois $\varphi = \tau_{1,n+1} \circ \tau_{1,j} \circ \sigma$, qui vérifie bien $\varphi(n+1) = n+1$. Et donc $\sigma = \tau_{1,j} \circ \tau_{1,n+1} \circ \varphi$ s'écrit comme la composition de moins de $2n-1$ transpositions de la forme voulue.

5. On le fait par récurrence, en utilisant que $\tau_{1,i+1} = \tau_{i,i+1} \circ \tau_{1,i} \circ \tau_{i,i+1}$ pour $i > 1$, ce qui fait que si on a écrit $\tau_{1,i}$ comme composition de transpositions de la forme voulue, c'est aussi le cas pour $\tau_{1,i+1}$. Comme pour $i = 2$, $\tau_{1,2}$ est déjà de la forme voulue, c'est donc bien le cas pour toutes les transpositions de la forme $\tau_{1,i}$ avec $2 \leqslant i \leqslant n$. Plus précisément, on obtient la formule

$$\tau_{1,i} = \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \ldots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \ldots \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-2,i-1}.$$

   Et en utilisant le résultat de la question précédente on obtient donc bien toute permutation comme compositions de transpositions de la sorte.

   Pour comprendre l'analogie avec les jeux de cartes, si on numérote chaque carte et si on note $\sigma(i)$ le numéro de la carte à la position i dans le paquet, on dit que l'ordre du paquet correspond à la permutation σ. Si on échange les cartes qui sont aux positions j et k, le numéro de la carte à la position i sera $\sigma(i)$ si $i \neq j, k$, $\sigma(j)$ si $i = k$ et $\sigma(k)$ si $i = j$, autrement dit c'est dans tous les cas $\sigma \circ \tau_{j,k}(i)$. Échanger les positions j et k revient à remplacer σ par $\sigma \circ \tau_{j,k}$. Échanger deux cartes consécutives revient donc à composer à droite par $\tau_{j,j+1}$. Trier le paquet en effectuant ces opérations revient donc exactement à composer à droite par de telles transpositions et obtenir à la fin l'identité, c'est à dire trouver la réciproque de σ sous forme de compositions de telles transpositions. Pour retrouver σ, il suffit de faire la réciproque de la compositions de telles transpositions, ce qui est aussi une composition de ces mêmes transpositions (dans l'ordre inverse). Autrement dit si on part d'un paquet trier et qu'on refait exactement les mêmes opérations d'échange de cartes consécutives dans l'ordre inverse, on retombe sur σ.

   Pour la solution en $\frac{n(n-1)}{2}$ coups, il suffit de regarder où se situe la carte numéro 1, la remonter par échanges successifs sur le dessus du paquet (en moins de $n-1$ échanges), puis regarder où est la carte numéro 2, la remonter à sa place en moins de $n-2$ échanges, etc. Au total on aura fait moins de $n-1+n-2+\cdots+2+1$ échanges, soit $\frac{n(n-1)}{2}$ (ce qui est le cas si le paquet était exactement dans l'ordre inverse et qu'on a appliqué cette méthode).

6. Notons T l'ensemble des transpositions. Pour montrer qu'on ne peut pas faire ce qui est demandé, l'idée est de raisonner en pensant à un graphe, pour lequel les sommets sont $1, 2, \ldots, n$ et où $\{i, j\}$ est une arête si la transposition $\tau_{i,j}$ est dans T. On a donc un graphe avec $k < n-1$ arêtes. On peut alors montrer que

ce graphe n'est pas connexe (ceci se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes : si un graphe à n sommets a k arêtes, alors il a au moins $n-k$ composantes connexes, en effet à chaque fois qu'on ajoute une arête on ne peut que relier deux composantes connexes, ou mettre l'arête dans une composante connexe déjà existante, on fait donc diminuer de un le nombre de composantes connnexes, ou il ne change pas).

Autrement dit, on peut écrire $[\![1,n]\!] = A \cup B$, avec A et B deux ensembles non vides et disjoints, tels que si $\tau_{i,j}$ est dans T, alors soit i et j sont dans A, soit i et j sont tous les deux dans B.

On montre alors par récurrence que toute permutation σ écrite comme composition de m transpositions de T vérifie $\sigma(A) \subset A$ et $\sigma(B) \subset B$. En particulier on ne peut jamais avoir $\sigma = \tau_{i,j}$ si $i \in A$ et $j \in B$.

Exercice 19.

1. La permutation réciproque de c est le cycle $(a_k\ a_{k-1}\ \dots\ a_2\ a_1)$.
2. Si on note $c = (1\ 2\ \dots\ k)$, on peut calculer le signe de $(c(j)-c(i))$ pour $i < j$. Si $j > k$ et $i \leqslant k$, on a bien $c(i) \leqslant k$ et $c(j) = j > k$, donc le signe est 1. Si $i > k$, alors $c(i) = i$ et $c(j) = j$ donc le signe est aussi 1. Si $i < j < k$, alors $c(i) = i+1$ et $c(j) = j+1$, donc le signe est aussi 1. Enfin si $j = k$, alors $c(i) = i+1$ et $c(j) = 1$, donc le signe vaut -1. Les seuls couples $i < j$ pour lesquels le signe vaut -1 sont les (i,k) avec $i \in [\![1,k-1]\!]$. Il y a donc $k-1$ signes négatifs dans la définition de la signature, et donc $\varepsilon(c) = (-1)^{k-1}$.
3. Il suffit de définir $\sigma(i) = a_i$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, et par exemple par récurrence définir tous les $\sigma(j)$ pour $j > k$ en prenant pour $\sigma(j)$ le plus petit élément de $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$. Comme les a_i sont deux à deux distincts, on obtient donc bien une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, qui est donc bien une bijection.

   Dans ce cas, en écrivant $c = \sigma \circ (1\ 2\ \dots\ k) \circ \sigma^{-1}$, on peut calculer l'image des a_i : $\sigma^{-1}(a_i) = i$, puis l'image de i par le cycle $(1\ 2\ \dots\ k)$ est $i+1$ (ou 1 si $i = k$), et enfin l'image de $i+1$ (ou de 1) par σ est bien a_{i+1} (ou a_1). Il suffit de montrer que si j est différent de tous les a_i, alors $c(j) = j$. Mais en effet on a alors $\sigma^{-1}(j)$ qui est différent de tous les i pour $i \in [\![1,k]\!]$, donc l'image de $\sigma^{-1}(j)$ par le cycle $(1\ 2\ \dots\ k)$ est $\sigma^{-1}(j)$ lui-même, puis son image par σ est bien j.

   On a donc $\varepsilon(c) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon((1\ 2\ \dots\ k)) \cdot \varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\ 2\ \dots\ k)) = (-1)^{k-1}$.
4. Si $c_1 = (a_1\ \dots\ a_k)$ et $c_2 = (b_1\ \dots b_\ell)$ on vérifie que $c_1(c_2(j)) = c_2(c_1(j))$ vaut la même chose dans les trois cas possibles : j est l'un des a_i, j est l'un des b_i, où j n'est ni l'un ni l'autre.
5. On procède par analyse-synthèse. Pour l'analyse, comme les cycles sont à support disjoints, on voit que les nombres qui apparaissent dans un cycles sont les images successive du premier nombre par application répétée du cycle (et donc par application successive de σ. On peut alors montrer que la relation d'équivalence « être dans le même cycle » correspond à dire $i\mathcal{R}j$ s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma^n(i) = j$. On peut alors montrer que chaque classe d'équivalence correspond à un cycle de la forme $(i\ \sigma(i)\ \sigma^2(i)\ \dots\ \sigma^k(i))$ (ou à un point fixe $\sigma(i) = i$), ce qui donne l'unicité des cycles, puisque la relation d'équivalence a une définition qui ne fait que intervenir σ. Pour la synthèse, on peut écrire cette relation d'équivalence, vérifier que ces cycles sont bien à supports disjoints, et que leur composition (dont l'ordre n'importe pas, d'après la question précédente) est bien σ.

   Si $k_1, \dots k_\ell$ sont les longueurs des cycles, m est le nombre de points fixes, on a donc $k_1 + \dots + k_\ell + m = n$, et la signature vaut

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k_1-1} \dots (-1)^{k_\ell - 1} = (-1)^{k_1+\dots+k_\ell-\ell} = (-1)^{n-m-\ell}.$$

Exercice 20.

1. Si c'était le cas, tous les éléments de S_n (ou A_n) s'écriraient de la forme σ^k (la composée k fois de σ) pour $k \in \mathbb{N}$, et donc pour deux permutations $\varphi_1 = \sigma^{k_1}$ et $\varphi_2 = \sigma^{k_2}$, on aurait $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \sigma^{k_1+k_2} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Il suffit donc de trouver des permutations qui ne commutent pas dans $\mathcal{S}_n$ pour $n \geqslant 3$ ou dans $\mathcal{A}_\backslash$ (pour $n \geqslant 4$).

   On peut prendre comme exemple $\tau_{1,2}$ et $\tau_{1,3}$ (avec les notations des autres exercices) $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = (1\ 3\ 2)$ et $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} = (1\ 2\ 3)$.

   Ou alors $(1\ 2\ 3)$ et $(2\ 3\ 4)$ dont la composition dans un sens donne $\tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}$, et dans l'autre sens $\tau_{1,3} \circ \tau_{2,4}$.
2. On montre que $\tau_{i,i+1} = c^{i-1} \circ \tau_{1,2} \circ c^{n+1-i}$ et on utilise le résultat de l'exercice 18.
3. Comme dans l'avant-dernière question de l'exercice 18, on montre que les $(i\ i+1\ i+2)$ engendrent $\mathcal{A}_n$ en pensant à un jeu de carte : par permutation circulaire de trois cartes consécutives, on peut faire remonter la première en haut du paquet, la deuxième en deuxième position, etc. jusqu'à remonter la

carte numéro $n-2$. Il ne reste alors que les deux dernières cartes à trier, mais si la permutation initiale était paire, alors ces deux dernières cartes sont déjà triées, puisque la transposition de ces deux dernières est impaire.

Ensuite, dans le cas où n est impair en notant $c = (1\ 2\ \dots\ n)$, on a bien c qui est une permutation paire, et comme précédemment on montre que $(i\ i+1\ i+2) = c^{i-1} \circ (1\ 2\ 3) \circ c^{n+1-i}$ ce qui permet de conclure. Pour le cas n pair, cela ne convient pas puisque $c \notin \mathcal{A}_n$. Mais dans ce cas, en posant $\widetilde{c} = (2\ 3\ \dots\ n)$, il suffit de montrer que l'on peut obtenir $(2\ 3\ 4)$ à partir de $(1\ 2\ 3)$ et $\widetilde{c}$, puisque par le même genre de formule, on a $(i\ i+1\ i+2) = \widetilde{c}^{i-1} \circ (2\ 3\ 4) \circ \widetilde{c}^{n+1-i}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$. Pour cela on remarque d'abord que $(1\ 3\ 4) = \widetilde{c} \circ (1\ 2\ 3) \circ \widetilde{c}^{n-2}$, puis que $(2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 4)$.

Exercice 21. Par analyse-synthèse. Une manière de faire est de dessiner les points de 1 à n, en dessinant une flèche du point i au point j si $\sigma(i) = j$. Pour que ce soit une permutation valide, il doit arriver et partir une fèche et une seule de chaque point. Si la fonction $k \mapsto |\sigma(k) - k|$ est injective, elle doit prendre toutes les valeurs entre 0 et $n-1$. En particulier il doit y avoir un unique point fixe et soit $\sigma(1) = n$, soit $\sigma(n) = 1$ (pour pouvoir prendre la valeur $n-1$). Il doit donc y avoir une flèche entre 1 et n (mais on ne sait pas dans quel sens). Il doit y avoir n flèches pour lesquelles les écarts (en valeur absolue) entre le nombre au départ et à l'arrivée prennent toutes les valeurs possibles. Une manière naïve d'essayer de le faire est de faire $1 \to n \to 2 \to (n-1) \to 3 \to (n-2) \to \dots$, de telle sorte que l'écart à chaque flèche diminue de 1. Le problème c'est qu'il faut que la flèche qui arrive en 1 ait un écart qui n'ait pas déjà été pris. Si on veut adapter la procédure on peut y arriver (en diminuant à un moment l'écart des extrémités d'une flèche, de telle sorte que le nombre auquel on arrive juste à la fin — qui va être proche de $\frac{n}{2}$ — a un écart avec 1 égal justement à l'écart qu'on n'avait pas réalisé), et en essayant sur des exemples on voit que ça marche pour $n = 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13 \dots$ mais pas pour les autres n. Y a-t-il d'autres manière de le faire ?

On reprend donc l'analyse en supposant qu'on a une telle permutation. L'idée est de regarder la parité de $\sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k| = \frac{n(n-1)}{2}$ (puisque chaque valeur entre 0 et $n-1$ est prise exactement une fois), et de voir que c'est la même que celle de $\sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k)$, puisque deux nombres opposés ont la même parité. Mais comme $\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n k$ puisque σ est une permutation, on en déduit que $\sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k) = 0$, et que donc $\frac{n(n-1)}{2}$ est pair, ou encore $n(n-1)$ est un mutiple de 4. Comme n et $n-1$ n'ont pas la même parité, alors soit n, soit $n-1$ est un multiple de 4. Donc n est de la forme $4p$ ou $4p+1$.

Synthèse. Pour le cas $n = 4p$ on dessine nos flèches comme ceci

$$1 \to 4p \to 2 \to 4p-1 \to 3 \to \dots \to 3p+2 \to p \to 3p+1,$$

ce qui fait qu'on a tous les écarts entre $4p-1$ et $2p+1$. On continue donc en « évitant l'écart $2p$:

$$3p+1 \to p+2 \to 3p \to p+3 \to 3p-1 \to \dots \to 2p-1 \to 2p+3 \to 2p \to 2p+2 \to 2p+1,$$

et on a obtenu tous les écarts entre $2p-1$ et 1. On fait alors les deux dernières flèches $2p+1 \to 1$ (qui nous donne l'écart $2p$) et $p+1 \to p+1$ qui donne l'écart 0.

Enfin pour le cas $n = 4p$ on procède de même en écrivant

$$1 \to 4p+1 \to 2 \to 4p \to 3 \to \dots \to 3p+3 \to p \to 3p+2,$$

ce qui fait qu'on a tous les écarts entre $4p$ et $2p+2$. On continue en évitant l'écart $2p+1$:

$$3p+2 \to p+2 \to 3p+1 \to p+3 \to \dots 2p \to 2p+3 \to 2p+1 \to 2p+2,$$

et on a obtenu tous les écarts entre $2p$ et 1. On finit en écrivant $2p+2 \to 1$ et $p+1 \to p+1$ qui nous donnent les deux écarts manquant $2p+1$ et 0.

Exercice 22.

1. En notant $y_j = x_{\varphi(j)}$, et donc $y_{i,j} = x_{i,\varphi(j)}$, on obtient que

$$\det(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n y_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),\varphi(i)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(\varphi^{-1}(j)),j}.$$

En effet, à $\sigma \in \mathcal{S}_n$ fixé, on peut faire le changement de variable $i \mapsto \varphi(i)$ (bijection) pour obtenir la dernière égalité.

Comme l'application $\sigma \mapsto \sigma\circ\varphi^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n$ (sa bijection réciproque étant $\sigma \mapsto \sigma\circ\varphi$), on peut faire ce changement de variable et obtenir

$$\det(y_1,\dots,y_n) = \sum_{\psi\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\psi\circ\varphi)\prod_{i=1}^n x_{\psi(i),i} = \varepsilon(\varphi)\times\sum_{\psi\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\psi)\prod_{i=1}^n x_{\psi(i)),i},$$

ce qui équivaut à

$$\det(x_{\varphi(1)},\dots,x_{\varphi(n)}) = \varepsilon(\varphi)\det(x_1,\dots,x_n).$$

Comme $\varepsilon(\varphi)\in\{-1,1\}$, on a bien $\varepsilon(\varphi)=\varepsilon(\varphi)^{-1}$, et on obtient donc la formule demandée.

2. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On a pour $y_k=(y_{i,k})\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\det(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+\lambda y_k,x_{k+1},\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)(x_{\sigma(k),k}+\lambda y_{\sigma(k),k})\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}^n x_{\sigma(i),i}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(k),k}+\lambda\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)y_{\sigma(k),k})\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}^n x_{\sigma(i),i}\\ &= \det(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)+\lambda\det(x_1,\dots,y_k,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Donc det est une forme n-linéaire. En prenant $\varphi=\tau_{i,j}$ dans la question précédente, on obtient, comme $\varepsilon(\tau_{i,j}) = -1$, que

$$\det(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = -\det(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n),$$

donc si $x_i=x_j$, alors $\det(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)$ est égal à son opposé, donc est nul. La forme n-linéaire est donc alternée. Enfin, si $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $e_{i,j}=1$ si $i=j$ et $e_{i,j}=0$ si $i\neq j$. Donc le produit $\prod_{i=1}^n e_{\sigma(i),i}$ n'est non nul que si $\sigma(i)=i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, autrement dit si σ est l'identité (dans ce cas $\varepsilon(\sigma)=1$), et donc $\det(e_1,\dots,e_n)=1\times\prod_{i=1}^n e_{i,i}=1$.

3. On a

$$\det(A^T)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j),j},$$

par le changement d'indice $i\mapsto j=\sigma(i)$. Comme $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ (de bijection réciproque elle-même), on obtient

$$\det(A^T)=\sum_{\psi\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\psi^{-1})\prod_{j=1}^n a_{\psi(i),i}=\det(A),$$

puisque $\varepsilon(\psi^{-1})\times\varepsilon(\psi)=\varepsilon(\mathrm{id})=1$ pour toute permutation ψ de $\mathcal{S}_n$, et donc que $\varepsilon(\psi^{-1})=\varepsilon(\psi)^{-1}=\varepsilon(\psi)$ (puisque la signature appartient à $\{-1,1\}$.

4. On sépare la somme en n parties en classant les permutations de $\mathcal{S}_n$ suivant les antécédents possibles de i. Si on note E_j l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ telles que $\sigma(j)=i$, alors les E_j forment une partition de $\mathcal{S}_n$, et on a

$$\det A=\sum_{j=1}^n\sum_{\sigma\in E_j}\varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^n a_{\sigma(k),k}=\sum_{j=1}^n a_{i,j}\sum_{\sigma\in E_j}\varepsilon(\sigma)\prod_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}^n a_{\sigma(k),k}.$$

À i et j fixés, on cherche donc à montrer que

$$\sum_{\sigma\in E_j}\varepsilon(\sigma)\prod_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}}^n a_{\sigma(k),k}=(-1)^{i+j}\det(\hat{A}_{i,j}).$$

En identifiant E_j comme l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$ dans $[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, on peut expliciter une bijection simple entre E_j et $\mathcal{S}_{n-1}$. En effet, en écrivant la bijection naturelle f_i de $[\![1,n]\!]\setminus i$ dans $[\![1,n-1]\!]$ (définie par $f_i(k)=k$ si $k<i$ et $f_i(k)=k-1$ si $k>i$), et de même pour f_j, l'application $\sigma\in E_j\mapsto f_i\circ\sigma\circ f_j^{-1}\in\mathcal{S}_{n-1}$ est une bijection. On a également, si on note $b_{k,\ell}$ les coefficients de la matrice $\hat{A_{i,j}}$ que $b_{k,\ell}=a_{f_i^{-1}(k),f_j^{-1}(\ell)}$. On a donc

$$\det(\hat{A}_{i,j})=\sum_{\varphi\in\mathcal{S}_{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}b_{\varphi(k),k}=\sum_{\varphi\in\mathcal{S}_{n-1}}\varepsilon(\varphi)\prod_{k=1}^{n-1}a_{f_i^{-1}(\varphi(k)),f_j^{-1}(k)}.$$

En faisant le changement d'indice $\ell = f_j^{-1}(k)$, puis en utilisant la bijection de E_j sur $\mathcal{S}_{n-1}$, on obtient donc

$$\det(\hat{A}_{i,j}) = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\varphi) \prod_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} a_{f_i^{-1}(\varphi(f_j(\ell))),\ell} = \sum_{\sigma \in E_j} \varepsilon(f_i \circ \sigma \circ f_j^{-1}) \prod_{\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} a_{\sigma(\ell),\ell}.$$

Il nous suffit donc de montrer que $\varepsilon(f_i \circ \sigma \circ f_j^{-1}) = (-1)^{i+j}\varepsilon(\sigma)$ (attention les deux ε ne sont pas les mêmes, le premier correspond à la signature dans $\mathcal{S}_{n-1}$ et l'autre dans $\mathcal{S}_n$), pour obtenir ce qu'on voulait. Pour cela, en notant c_i le cycle $(i\ i+1\ n)$ (de signature $(-1)^{n-i}$), on voit que f_i^{-1} est la restriction de c_i à $[\![1, n-1]\!]$. Et donc $f_i \circ \sigma \circ f_j^{-1}$ est la restriction de $\widetilde{\sigma} = c_i^{-1} \circ \sigma \circ c_j$ à $[\![1, n-1]\!]$. Comme on voit que $\widetilde{\sigma}(n) = n$ (puisque n est envoyé sur j par c_j, puis sur i par σ, et enfin de nouveau sur n par c_i^{-1}), alors la signature de $\widetilde{\sigma}$ est la même que celle de sa restriction à $[\![1, n-1]\!]$ (tous les signes concernés sont égaux à 1 dans la formule de la signature). Autrement dit $\varepsilon(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon(f_i \circ \sigma \circ f_j^{-1})$ (la première signature est celle de $\mathcal{S}_n$, la deuxième celle de $\mathcal{S}_{n-1}$). Et comme $\varepsilon(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon(c_i^{-1})\varepsilon(\sigma)\varepsilon(c_j) = (-1)^{n-i}(-1)^{n-j}\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i+j}\varepsilon(\sigma)$, on obtient exactement ce que l'on voulait.

5. La formule précédente nous dit, en notant $c_{i,j}$ les coefficients de $\mathrm{Com}(A)$, que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j} = (A \times \mathrm{Com}(A)^T)_{i,i}.$$

Pour obtenir que $(A \times \mathrm{Com}(A)^T) = \det(A)\, I_n$, il reste donc à montrer que $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} c_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq k$. L'idée est de calculer le déterminant de la matrice D_k obtenue à partir de A en remplaçant la ligne i par la ligne k. Les coefficients de la comatrice de D_k à la ligne i sont donc les mêmes que ceux de celle de A à la ligne i. Et donc

$$\det(D_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} c_{i,j}.$$

Mais comme le déterminant de D_k est nul (deux lignes sont identiques, on utilise les questions 2 et 3).
Pour obtenir $\mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A)\, I_n$, on applique le résultat précédent à A^T. On transpose et on utilise la question 3, qui nous donne également que $\mathrm{Com}(A^T) = \mathrm{Com}(A)^T$, et on obtient le résultat voulu (on aurait pu également passer par le développement par rapport à une colonne, qui peut se montrer directement à partir des questions 3 et 4).

Exercice 23. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit la matrice P_σ comme celle ayant les colonnes $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Sur la colonne j de P_σ, il y a donc un 1 à la ligne $\sigma(j)$ et un 0 ailleurs. Donc

$$(P_\sigma \times P_\varphi)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{i,k} (P_\varphi) k, j,$$

et le terme sous la somme est nul sauf si $i = \sigma(k)$ et $k = \varphi(j)$. Donc si $i = \sigma(\varphi(j))$, alors la somme vaut 1 (seul l'indice $k = \varphi(j)$ y contribue), et sinon elle vaut zéro. Autrement dit $(P_\sigma \times P_\varphi)_{i,j} = 1$ si $i = \sigma \circ \varphi(j)$ et 0 sinon. Donc $P_\sigma \times P_\varphi$ est bien la matrice $P_{\sigma \circ \varphi}$.

2. On a

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\psi \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\psi) \prod_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{\psi(i),i}.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}_n$ fixé, le produit n'est non nul que si l'on a pour tout i, $\psi(i) = \sigma(i)$. Autrement dit si $\psi = \sigma$. On obtient donc $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. Remarque : faire le lien entre les formules $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$ et $\varepsilon(\sigma \circ \varphi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi)$, avec la première question.

Exercice 24.

1. La bijection explicite est $(m, n) \mapsto (2n+1)2^m$.
2. La bijection réciproque est $f^{-1}(n) = \{j \in \mathbb{N}, E(2^{-j}n) \text{ est impair}\}$ (cela correspond à la position des uns dans l'écriture binaire de n.

3. Si on écrit un entier n sous la forme $p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ avec $p_1 < \cdots < p_n$ des nombres premiers distincts, on lui associe $F(n) = p_1^{f(\alpha_1)}\dots p_n^{f(\alpha_n)}$ avec f la bijection qui décrit $\mathbb{Z}$: les images de $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ par f sont dans l'ordre $0, 1, -1, 2, -2\dots$ (on peut écrire $f(m) = (-1)^{m+1}E(\frac{m+1}{2})$. Il faut vérifier que c'est bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et les rationnels positifs, qui s'écrivent également de manière unique sous cette forme-là. Une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ est donc G donnée par $G(0) = 0$, $G(n) = F(n)$ et $G(-n) = -F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Finalement une bijection entre n et $\mathbb{Q}$ est $G \circ f$.

Exercice 25.

1. On peut prendre par exemple $x \in]0, 1[\mapsto \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.
2. Pour un ensemble $A \subset \mathbb{N}$, on lui attribue la suite de zéros et de uns $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en mettant des uns aux positions où l'élément correspondant est dans A : $a_n = 1$ si $n \in A$ et $a_n = 0$ sinon. Ceci donne bien une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

   Dans cette bijection, les suites valant 0 à partir d'un certain rang correspondent aux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, dont on sait qu'il y en a un nombre dénombrable (voir l'exercice 24 pour une bijection explicite). De même celles valant 1 à partir d'un certain rang correspondent aux sous-ensembles dont le complémentaire est fini, ce qui est aussi dénombrable (on est en bijection avec le cas qui précède par $A \mapsto \mathbb{N} \setminus \{A\}$). La réunion F de ces deux ensembles dénombrables est donc dénombrable.
3. Si $a \in E$, on a $0 < f(a) < \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1}$ puisque les a_i ne sont pas tous nuls et pas tous égaux à 1, donc $f(E) \subset]0, 1[$. Pour l'injectivité, si $a, b \in E$ et $a \neq b$, on note k le premier rang où $a_k \neq b_k$ (et quitte à inverser le rôle de a et b on peut supposer $a_k = 0$ et $b_k = 1$). On a alors

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{n\geqslant k+1} \frac{b_k - a_k}{2}^{n+1},$$

   il suffit donc de montrer que la valeur de la somme est strictement plus grande que $\frac{-1}{2^{k+1}}$ pour obtenir que $f(b) > f(a)$. En effet on a toujours $b_n - a_n \geqslant -1$, et on ne peut pas avoir tout le temps égalité (sinon a_n serait constante égale à 1 pour $n \geqslant k$ — et b_n constante égale à zéro). On obtient donc

$$f(b) - f(a) > \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{n\geqslant k+1} \frac{-1}{2}^{n+1} = 0.$$

4. On pose $g : [0, 1[\to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ la fonction qui à un réel associe la suite de son développement en binaire (on peut le définir par récurrence en posant $a_0 = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ ou 1 sinon, puis de même pour les autres chiffres en posant $a_k = 0$ si $x - \sum_{n<k} \frac{a_n}{2^{n+1}} \in [0, \frac{1}{2^{k+1}}[$ et 1 sinon — ou plus directement la formule est que $g(x)_k = 1$ si la partie entière de $2^{k+1}x$ est paire, et 0 sinon).

   On montre alors que pour $x \in [0, 1[$, $g(x)$ ne peut pas être constante égale à 1 à partir d'un certain rang et que $f(g(x)) = x$, et que pour $a \in E, g(f(a)) = a$ (ce qui est une autre manière de montrer l'injectivité de f sur E). Donc si $x \in]0, 1[\setminus f(E)$, alors $g(x) \notin E$ (sinon $x = f(g(x)) \in f(E)$), donc $g(x) \in F$ (donc constant à zéro à partir d'un certain rang), et donc on obtient que $x = f(g(x))$ est de la forme souhaitée (la somme définissant f est finie).

   Enfin si x est de la forme souhaitée, alors le développement $g(x)$ est constant égal à zéro à partir d'un rang, donc x ne peut pas être l'image d'un élément a de E, puisqu'on aurait $g(x) = g(f(a)) = a$, qui n'est pas constant à 0 à partir d'un certain rang.

   Donc $]0, 1[\setminus f(E)$ est dénombrable, et donc en bijection avec F.
5. On pose h une bijection entre F et $]0, 1[\setminus f(E)$ (tous deux dénombrables) et on définit $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to]0, 1[$ par

$$\Phi(a) = \begin{cases} h(a) & \text{si } a \in F \\ f(a) & \text{si } a \in E \end{cases},$$

   et on vérifie que c'est bien une bijection. Avec les bijections initiales de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on obtient bien ce qu'on voulait.
6. L'idée est de créer deux suites de zéros et de uns à partir d'une. Si on pose $\beta : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par $\beta(a) = (a_{\text{pair}}, a_{\text{impair}})$, où $a_{\text{pair}} = (a_0, a_2, a_4, \dots)$ et $a_{\text{impair}} = (a_1, a_3, \dots)$, on voit que β est une bijection. Si Φ est une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, alors on pose $\Phi_2(a, \widetilde{a}) = (\Phi(a), \Phi(\widetilde{a}))$, et alors la fonction $\Phi_2 \circ \beta \circ \Phi^{-1}$ est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26. Si A est de la forme $f(x)$ pour un certain $x \in E$, alors on regarde si $x \in A$. Si c'est le cas, alors $x \in f(x)$, donc $x \notin A$, ce qui n'est pas possible. Et si ce n'est pas le cas, c'est que $x \notin A$, donc $x \notin f(x)$ donc $x \in A$, ce qui est aussi impossible. Donc $A \notin f(E)$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 27. Les ensembles $\mathbb{Q} \cap [0,1[$ et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ sont dénombrables, donc en bijection.

Pour expliciter une bijection entre $]0,1[$ et $[0,1[$, il faut essayer d'écrire $]0,1[= A \cup B$ avec A et B disjoints et B dénombrable. Alors on a $[0,1[= A \cup (\{0\} \cup B)$, où les unions sont disjointes, et on peut donc prendre l'identité de A sur A et trouver une bijection simple de B sur $\{0\} \cup B$.

Par exemple on prend $B = \{1 - \frac{1}{n}, n > 1\}$, et on a la bijection suivante $f :]0,1[\to [0,1[$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si pour tout } n \in \mathbb{N}^*, x \neq 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n-1} & \text{s'il existe } n > 1 \text{ tel que } x = 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Exercice 28. Pour $A \subset E$ on pose $\varphi(A) = g(F \setminus f(E \setminus A))$. On a donc une application de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ dans lui-même. Supposons qu'on ait un point fixe $E_0 \subset E$ de φ. On peut donc construire $E_1 = E \setminus E_0$, $F_1 = f(E_1)$ et $F_0 = F \setminus F_1$. On a donc $g(F_0) = \varphi(E_0) = E_0$. Autrement dit on a g qui est injective sur F_0 et d'image E_0, donc pour $x \in E_0$, on peut définir $h(x)$ comme l'unique $y \in F_0$ tel que $g(y) = x$. Et pour $x \in E_1$, on pose $h(x) = f(x)$. On peut alors montrer que h est bien une bijection entre E (l'union disjointe de E_0 et E_1) et F (l'union disjointe de F_0 et F_1), en utilisant l'injectivité de f sur E_1 et le fait que $f(E_1) = F_1$.

Pour construire le point fixe, on veut faire par itération en partant de $A_0 = A$ et appliquant φ successivement : $A_{n+1} = \varphi(A_n)$. Et on espère pouvoir définir une « limite » qui soit un point fixe. Le point clé est de montrer que φ est croissante pour l'inclusion : si $A \subset B$, alors $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

On peut alors faire une limite de deux manières : soit on part de $A_0 = \emptyset$, donc $A_0 \subset A_1$, donc par récurrence on a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, et la « limite » est alors la réunion $E_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, soit on part de $A_0 = E$ et donc $A_1 \subset A_0$, dans ce cas la suite est décroissante pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), et cette fois ci la « limite » est alors l'intersection $E_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

On montre alors que E_0 est bien un point fixe, par exemple en montrant que $\varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$ dans le premier cas ou que $\varphi(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$ dans le deuxième. Attention au piège, ce n'est pas évident, il y a vraiment quelque chose à montrer (on doit utiliser l'injectivité de f dans le premier cas, et celle de g dans le deuxième cas) ! Ce n'est pas du tout pareil pour $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ de montrer que $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ (ici on parle vraiment de l'application φ, appliquée sur des éléments de l'ensemble de départ), que de montrer que pour $f : E \to F$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (ici on parle d'ensemble image par f de sous-ensembles de l'ensemble de départ). Remarquer d'ailleurs que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ en général, mais que c'est vrai si f est injective...

Exercice 29.

1. Il suffit de prendre $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$. En effet si deux fonctions continues ont la même restriction à $\mathbb{Q}$ (qui est dense dans $\mathbb{R}$), elles sont égales partout.
2. À une suite $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on associe les réels $(b_{i,j}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ tels que $b_{i,j} = a_{\varphi(i,j)}$, où φ est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Puis aux réels $(b_{i,j})$ on associe les suites $c_i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (pour $i \in \mathbb{N}$) définie comme $c_i = (b_{i,j})_{j \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. L'application $\Phi : a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto (c_i)_{i \in \mathbb{N}} \in ((\{0,1\})^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}^{\mathbb{N}})$ est bien une bijection.
3. Si ψ est la bijection entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (qui est en bijection explicite avec $\mathcal{P}(n)$) et $\mathbb{R}$, et que φ est une bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, alors la fonction $\Psi : f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \mapsto \psi(\Phi^{-1}(f \circ \varphi)) \in \mathbb{R}$ est une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
4. On compose la première injection par Ψ pour obtenir une injection de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, l'autre injection étant par exemple celle qui à $x \in \mathbb{R}$ associe la fonction constante égale à x sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30.

1. On a bien une relation d'ordre, et on sait toujours comparer deux réels, et pour montrer que ce n'est pas bien ordonné, on prend par exemple $A = \mathbb{R}$ qui n'a pas de plus petit élément y, puisque l'on peut toujours trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.
2. Si $A \subset \mathbb{N}$ n'admet pas de plus petit élément on pose $B = \mathbb{N} \setminus A$. Comme $0 \notin A$ (sinon ce serait le plus petit élément, on obtient que $[\![0,0]\!] \subset B$. Et si $[\![0,n]\!] \subset B$, alors $\forall a \in A, a > n$, donc $n+1 \notin A$, sinon ce serait le plus petit élément de A, et on obtient donc que $[\![0,n+1]\!] \subset B$. Par récurrence on obtient que tout n de $\mathbb{N}$ appartient à B, et que donc $A = \mathbb{N} \setminus B$ est vide.
3. (a) Si A est non vide, on définit i_0 comme le plus petit élément de $\{i \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N}, (i,j) \in A\}$ (qui est bien non vide), et j_0 comme le plus petit élément de $\{j \in \mathbb{N}, (i_0, j) \in A\}$ (qui est aussi non vide). Et on montre bien que (i_0, j_0) est le plus petit élément de A pour $\preccurlyeq$.

(b) Supposons qu'on a une fonction f croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et injective, c'est à dire que si $n \leqslant m$, alors $f(n) \preccurlyeq f(m)$ et si $n \neq m$, alors $f(n) \neq f(m)$, ce qu'on écrira $n < m \Rightarrow f(n) \prec f(m)$ (c'est une fonction strictement croissante).

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n_0) = (1,0)$, alors $f(n_0 - 1) \prec (1,0)$ donc $f(n_0) = (0, i_0)$ avec $i_0 \in \mathbb{N}$. On a donc que $\forall n < n_0, f(n) \preccurlyeq (0, i_0)$, et $\forall n \geqslant n_0, f(n) \succcurlyeq (1,0)$, donc par exemple $(0, i_0 + 1) \notin f(\mathbb{N})$. Donc f n'est pas surjective (attention à traiter le cas $n_0 = 0$, pour lequel $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geqslant f(n_0) = (1,0)$, donc par exemple $(0,0)$ n'appartient pas à $f(\mathbb{N})$).

4. Pour le fait que c'est totalement ordonné, si $x \neq y$, on pose i_0 le plus petit élément de $\{i \in \mathbb{N}, x_i \neq y_i\}$ (qui est bien non vide). Et donc si $x_{i_0} > y_{i_0}$, alors $x \succcurlyeq y$, et si $x_{i_0} < y_{i_0}$ alors $x \preccurlyeq y$.

   Pour le fait que ce n'est pas bien ordonné, on montre que l'ensemble $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de plus petit élément, où e_n est la suite de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est nulle partout sauf à l'indice n. On a en effet que $e_0 \succcurlyeq e_1 \succcurlyeq e_2 \dots \succcurlyeq e_n \dots$.

5. On pourrait par exemple écrire $m(A)$ comme $\bigcup_{n \in N^*} A^n$, et écrire pour $x, y \in m(A)$ que $x \preccurlyeq y$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite
   — ce sont les mêmes mots : $x = y$
   — le mot x est le début du mot y : il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A^i$, et il existe $j > i$ tel que $y \in A^j$, et pour tout $k \in [\![1, i]\!]$ la k-ième lettre de x est la même que celle de y.
   — il existe $k, i, j \in \mathbb{N}*$ tels que $i \geqslant k$ et $x \in A^i$, $j \geqslant k$ et $y \in A^j$, et les $k-1$ premières lettres sont identiques (éventuellement aucune pour $k = 1$), et la k-ième lettre de x est située avant celle de y (strictement) dans l'alphabet A.

   De même que dans la question précédente, pour montrer que c'est totalement ordonné, si les mots x et y sont différents et que l'un n'est pas le début de l'autre, on note i_0 le premier indice i où les lettres de x et de y sont différentes, et si la lettre de x à la position i_0 est avant celle de y dans l'alphabet, alors $x \preccurlyeq y$, et sinon $y \preccurlyeq x$. On est juste en train de dire qu'on sait classer deux mots dans l'ordre... Et que donc si on se donne un nombre fini de mots, on peut en faire un dictionnaire.

   Par contre si on s'en donne un nombre infini, ce n'est plus le cas... Par exemple si la lettre a est avant la lettre b, alors en écrivant x_n le mot $aaaaa \dots ab$ (avec n lettres a), on a $x_0 \succcurlyeq x_1 \succcurlyeq x_2 \dots \succcurlyeq x_n \dots$, et donc l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas de plus petit élément.