Notions fondamentales de L1–L2
Examen du 30 octobre 2018.

L'évaluation sera particulièrement exigeante en termes de soin, de précision et de rigueur :
— écrivez des phrases proprement (dans tous les sens du terme),
— pensez à la concision (donnez tous les arguments nécessaires, mais n'en donnez pas de superflus),
— donnez des arguments clairs avec une structure logique parfaitement compréhensible.
Pour tout cela, ne pas hésiter à bien utiliser le brouillon !

L'examen est divisé en de multiples sous-questions dont les réponses doivent être très courtes (une seule ligne ou phrase pour certaines). La taille attendue de réponse est indiquée pour chaque exercice ou chaque partie du problème.

Cette première page d'exercices sera sur environ 10 points.

Exercice 1 *(une demi-page).* Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application, et $A \subset E$.

1. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Si f est injective, montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
3. Si f n'est pas injective, montrer qu'il existe un ensemble A_0 tel que $f^{-1}(f(A_0)) \neq A_0$.

Exercice 2 *(une demi-page).* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $x + e^x = 1 + \frac{1}{n}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'elle admet une unique solution notée x_n, et que l'on a $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $x_n = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.
3. Déterminer un développement asymptotique de x_n avec un reste d'ordre $O(\frac{1}{n^3})$.

Exercice 3 *(une demi-page).*

1. Factoriser $X^4 - 3X^2 - 4$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Décomposer $\dfrac{20}{X^4 - 3X^2 - 4}$ en éléments simples (sur $\mathbb{R}$).
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{20}{4 + 3x^2 - x^4}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 *(une demi-page).* Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on pose $\Phi(P) = XP'(X) + P'(X+1)$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire sa matrice dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 5 *(une demi-page).* Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?
2. Pour $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\int_0^x s^{n-1}\,\mathrm{d}s$ et en déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$.
3. Montrer que pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{s^N}{1+s}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{N+1}$.
4. En déduire que $\sum_{n=1}^{N} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

Problème : matrice à coefficients strictement positifs.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients $a_{i,j}$ sont strictement positifs.

L'objectif de ce problème est d'obtenir des résultats sur les valeurs propres et vecteurs propres de A. Ceci constitue une partie du théorème de Perron-Frobenius (démontré par Oskar Perron en 1907 et généralisé par Georg Frobenius en 1912), exemple fondamental d'interaction entre l'analyse et l'algèbre linéaire, et dont les applications sont importantes dans de nombreux domaines (probabilités, théorie des graphes, dynamique des populations, économie, sciences des données, moteurs de recherche).

Le problème sera noté sur plus de 10 points, il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale. Les questions ne sont pas indépendantes mais elles ne sont pas bloquantes pour résoudre les suivantes, on peut admettre les résultats des questions précédentes dont on a besoin.

Le but des deux premières parties est de montrer les résultats suivants :

Théorème (partiel) de Perron (1907)

- Il existe $\rho > 0$ et $q = (q_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tels que $Aq = \rho q$ et $q_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Tout vecteur propre de A dont les coordonnées sont positives est forcément associé à ρ.
- L'espace propre de A associé à ρ est de dimension 1.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A différente de ρ, alors $|\lambda| < \rho$.

La troisième partie est une application aux chaines de Markov, et il y a enfin une partie bonus pour montrer que ρ est racine simple du polynôme caractéristique de A.

On note $C = \{x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant 0\}$ l'ensemble des vecteurs à composantes positives, et $U = \{x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1, n]\!], x_i > 0\}$ l'ensemble des vecteurs à coefficients strictement positifs. On se donne également une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Partie 1, où l'on construit ρ et q *(deux pages).*

Si $x \in C \setminus \{0\}$, on note $r(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall i \in [\![1, n]\!], (Ax)_i \geqslant \lambda x_i\}$, et on pose $\rho = \sup_{x \in C \setminus \{0\}} r(x)$.

1. Montrer que pour $x \in U$ on a $r(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \dfrac{(Ax)_i}{x_i}$.
2. Soit x dans $C \setminus \{0\}$.
   (a) Montrer que $Ax \in U$.
   (b) Montrer que $r(\frac{x}{\|x\|}) = r(x)$.
   (c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(Ax)_i \geqslant r(x) x_i$.
   (d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(A(Ax))_i \geqslant r(x)(Ax)_i$ et en déduire que $r(Ax) \geqslant r(x)$.
   (e) Montrer que s'il existe un i_0 dans $[\![1, n]\!]$ tel que $(Ax)_{i_0} > r(x) x_{i_0}$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $(A(Ax))_i > r(x)(Ax)_i$ et en déduire que $r(Ax) > r(x)$.
3. Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $\min(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\beta - \alpha|)$ et que le minimum de deux fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue. En déduire d'après la question 1 que r est continue sur U.
4. On note $K_0 = \{x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in C, \|x\| = 1\}$ et $K_1 = \{Ax, x \in K_0\}$.
   Montrer que K_1 est un compact de $\mathbb{R}^n$. Déduire des questions 2a et 3 que r atteint son maximum sur K_1 en un point que l'on notera q.
5. Montrer à l'aide de 2b, 2d et 4 que si $x \in C \setminus \{0\}$, alors $r(x) \leqslant r(q)$. En déduire que $\rho = r(q)$.
6. Si $x \in C \setminus \{0\}$ vérifie $r(x) = \rho$, déterminer $r(Ax)$ et utiliser les questions 2e, puis 2a pour montrer que $Ax = \rho x$, puis que $x \in U$.

On vient donc de montrer, d'après les questions 5 et 6, que q est un vecteur propre de A associé à ρ, dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Partie 2 *(deux pages)*. En appliquant le résultat de la première partie à la matrice A^T, on obtient une valeur propre $\rho^* > 0$ et un vecteur propre associé p avec toutes les composantes strictement positives.

1. Calculer $\langle p, Aq\rangle$ de deux manières différentes et en déduire que $\rho^* = \rho$.
2. Si $x \in C$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre λ, en calculant $\langle p, Ax\rangle$, montrer que $\lambda = \rho$, et que donc $x \in U$.
3. On veut montrer que $E_\rho = \ker(A - \rho I_n)$ est de dimension 1. On suppose que v est un vecteur propre associé à ρ, et sans perte de généralité, on peut supposer qu'il a au moins une composante strictement positive (quitte à multiplier v par -1). On pose $\alpha = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \dfrac{v_i}{q_i}$, et on pose $u = \alpha q - v$.
   (a) Montrer que $u \in C$, que $Au = \rho u$, et qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_{i_0} = 0$.
   (b) En déduire d'après 2 que $u = 0$ et conclure.
4. Rappeler pourquoi si $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}^*$ sont tels que $\left|\sum\limits_{i=1}^n w_i\right| = \sum\limits_{i=1}^n |w_i|$, alors il existe des réels strictement positifs $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $w_i = \alpha_i w_1$ pour tous les $i \in [\![2, n]\!]$.
5. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A différente de ρ, on cherche à montrer que $|\lambda| < \rho$. On procède par l'absurde en supposant que $|\lambda| \geqslant \rho$. Soit z un vecteur propre (complexe) associé à λ, on pose $x = (|z_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (on a donc $x \in C \setminus \{0\}$).
   (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(Ax)_i \geqslant \rho x_i$, et en déduire que $r(x) = \rho$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(Ax)_i = |(Az)_i| = \rho x_i$, en utilisant la partie 1, question 6.
   (c) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = |z_i| > 0$, puis qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $z = \beta x$, puis que $\lambda = \rho$, et conclure.

Partie 3 *(une demi-page)*. Application aux chaînes de Markov. On suppose que la matrice A vérifie que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ (on l'appelle matrice stochastique, le coefficient $a_{i,j}$ représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j, en général une matrice stochastique n'a pas toutes ses composantes strictement positives mais on suppose cela ici).

1. En prenant $x = (1, 1, \ldots, 1)$, calculer Ax et en déduire que $\rho = 1$.
2. En déduire qu'il existe un unique vecteur $p = (p_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in C$ tel que $\sum\limits_{i=1}^n p_i = 1$ et $p^T A = p^T$.

Ce résultat correspond à dire que p représente une loi de probabilité sur les états de 1 à n qui est invariante à chaque étape.

Bonus. Le but de cette question est de montrer que la valeur propre ρ est simple. On note B_ρ la transposée de la comatrice de $A - \rho I_n$.

1. Calculer le rang de $A - \rho I_n$ et en déduire que $B_\rho \neq 0$.
2. Montrer que $(A - \rho I_n)B_\rho = 0$, puis que toutes les colonnes de B_ρ sont colinéaires à q.
3. De même, montrer que $(A^T - \rho I_n)B_\rho^T = 0$, et que toutes les lignes de B_ρ sont colinéaires à p.
4. En déduire que tous les coefficients de B_ρ sont non-nuls et de même signe.
5. En notant $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, montrer que $\chi_A'(\rho) = -\mathrm{Tr}(B_\rho) \neq 0$ et en conclure que ρ est une valeur propre simple de A.

Pour votre culture : il y a une dernière partie du théorème de Perron, qui est souvent la plus importante pour les applications (vous pourrez y réfléchir chez vous après l'examen). On peut en effet montrer que $\frac{A^k}{\rho^k}$ converge vers une matrice $P = qp^T$, qui est un projecteur sur l'espace vectoriel engendré par q, appelé projecteur de Perron. Ceci montre en particulier, pour l'application de la partie 3, que la loi de la chaine de Markov converge vers l'unique mesure de probabilité invariante (on obtient même dans ce cas un taux de convergence exponentiel).

La généralisation du théorème de Perron par Frobenius concerne les matrices dont certaines composantes peuvent être nulles. Avec certaines hypothèses supplémentaires raisonnables, on peut retrouver les mêmes résultats que ceux donnés par le théorème de Perron.