# Notions Fondamentales L1–L2
# Questions de type « Savoir-Faire » (2017).

1. Soient $E$ $F$, et $I$ des ensembles, $f : E \to F$ une application. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de $E$ et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de $F$, montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$. On pourra donner une autre expression du terme de gauche.
3. On pose $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On pourra utiliser (et démontrer) que pour $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x < x$.
4. Soit $f : ]0, 1] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de « $f$ est continue sur $]0, 1]$ » et « $f$ est uniformément continue sur $]0, 1]$ », avec des quantificateurs. Donner un exemple de fonction $f$ continue sur $]0, 1]$ mais pas uniformément continue (et le justifier).
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(nx)}{1 + n^4}$ définit une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
6. Donner le rayon de convergence de la série $f(x) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$. Donner une expression simple de $f(x)$ lorsque $x \geqslant 0$. Montrer que pour $x \leqslant 0$, $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{-x}} + e^{\sqrt{-x}})$.
7. On pose $E$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de $x$) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f^{(n)}(x) = 0$.
   Montrer que $E$ est un espace vectoriel.
8. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, et $f \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe $x$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que la famille $(f^{n-k}(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre. Exprimer la matrice de $f$ dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$, et en déduire que $f^n = 0$.
9. Soit $P = X^4 - 4X + 1$. Calculer $P'$ et montrer que $P$ a 4 racines simples (complexes).
10. Calculer $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + x}{x(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.
11. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P$ et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer $P^{-1}$).