Notions Fondamentales L1–L2
Correction des questions de type « Savoir-Faire » (2017).

1. On peut faire par équivalence. En effet pour $x \in E$,

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I, f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in f^{-1}B_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

De même, pour $y \in F$,

$$y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i, y = f(x) \Leftrightarrow \exists i \in I, \exists x \in A_i, y = f(x) \Leftrightarrow \exists i \in I, y \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Un raisonnement par double inclusion fonctionne aussi, on fait juste exactement les mêmes étapes dans les deux sens.

2. On sait d'abord que $(1+2+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$ (on peut le montrer par récurrence, mais ce genre de formule doit faire partie de votre bagage mathématique). On veut donc montrer que $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, et on le fait par récurrence. On vérifie que $1 = \frac{2^2}{4}$, puis si le résultat est vrai au rang n, on a alors

$$1+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1+\tfrac{1}{4}n^2) = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$.

3. On pose $h(x) = x - \sin x$. La fonction h est C^∞ et on voit que $h'(x) = 1 - \cos(x)$ est strictement positif sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, donc h est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En particulier pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) > h(0) = 0$ soit encore $\sin x < x$. On montre donc par récurrence que $0 < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. C'est vrai au rang 0 puisque $0 < u_1 = 1 < u_0 = \frac{\pi}{2}$. Si c'est vrai au rang n, on a bien $u_{n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $0 < \sin(u_{n+1}) < u_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée, elle converge vers une limite ℓ qui, par continuité, vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\sin \ell = \ell$. On ne peut donc pas avoir $\ell \in]0, \frac{\pi}{2}]$ (sinon on aurait $\sin \ell < \ell$), donc $\ell = 0$.

4. Continuité : $\forall x \in [0,1[, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in [0,1[, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Continuité uniforme : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [0,1[, \forall y \in [0,1[, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
On sait que si f est continue sur $[0,1]$, alors elle est uniformément continue. Donc pour prendre un contrexemple sur $]0,1]$, il faut que ce ne soit pas prolongeable par continuité en 0. Prenons par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ et montrons que cela fonctionne.
On veut donc montrer : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in [0,1[, \exists y \in [0,1[, |x-y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
On prend donc $\varepsilon = 1$ et on veut montrer que ça marche. Soit $\delta > 0$. On prend $x = \delta$ et $y \in]0, \delta]$ tel que $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1$. C'est possible : on obtient bien $y = \frac{x}{x+1} = \frac{\delta}{\delta+1} < \delta = x$. On a donc $|x-y| = x - y < \delta$ et $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1 \geqslant 1$.

5. On pose $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+n^4}$. On a $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{1+n^4} \leqslant \frac{1}{n^4}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente (critère de Riemann), donc $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) vers une fonction f continue (puisque les f_n sont continues). De même f_n est C^1 et $f_n'(x) = \frac{-n\sin(nx)}{1+n^4}$, donc $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{n}{1+n^4} \leqslant \frac{1}{n^3}$. Pour la même raison, $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, et le théorème d'interversion de limite et de dérivée donne que f est C^1 et que sa dérivée est donnée par $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{-n\sin(nx)}{1+n^4}$.

6. Le rayon de convergence est infini, en effet la série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{|x|^k}{(2k)!} = \frac{\sqrt{|x|}^{2k}}{(2k)!}$, et on sait que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente pour $a \geqslant 0$. Pour $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x}^{2k} = x^k$, et on reconnait donc l'expression de $\cos\sqrt{x}$. Pour $x \leqslant 0$, on a $(\sqrt{-x})^{2k} = (-x)^k = (-1)^k x^k$. On a donc que $f(x) = \mathrm{ch}\,\sqrt{-x} = \frac{1}{2}(e^{-\sqrt{-x}} + e^{\sqrt{-x}})$.

7. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$. On a d'abord que la fonction nulle vérifie bien les hypothèses. Soit donc f, g des fonctions C^∞ et λ, μ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que $\lambda f + \mu g \in E$. Soit $x \in \mathbb{R}$ montrons qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0\ (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = 0$. On sait qu'il existe n_1 et n_2 tels que $\forall n \geqslant n_1, f^{(n)}(x) = 0$ et $\forall n \geqslant n_2, g^{(n)}(x) = 0$. On prend $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et cela convient, puisque si $n \geqslant n_0$ alors $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x) = 0 + 0$ puisque $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$.
8. La propriété est vraie pour $k = 1$, puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, donc $(f^{n-1}(x))$ est libre. Si elle est vraie pour un $k-1$ avec $2 \leqslant k \leqslant n$, on veut montrer que la famille $(f^{n-k}(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

   Si $\lambda_{n-k} f^{n-k}(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, on applique f, le dernier terme disparaît et on obtient $\lambda_{n-k} f^{n-(k-1)}(x) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(x) = 0$, ce qui donne par l'hypothèse de récurrence que $\lambda_{n-k}, \ldots, \lambda_{n-2}$ sont tous nuls. Il reste donc $\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, ce qui donne que $\lambda n - 1 = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$.

   En notant $e_i = f^i(x)$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient que $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < n-1$ et $f(e_{n-1}) = 0$. La matrice de f dans la base $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Par ailleurs dans cette base, on voit bien que $f^n(e_i) = f^{n+i}(x) = f^i(f^n(x)) = 0$. Donc f^n est l'application nulle.
9. On a $P' = 4(X^3 - 1)$, qui a pour racines $1, j, j^2$ où $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Si P avait une racine double λ, alors elle serait racine de P', et on vérifie que les racines de P' ne sont pas racines de P. Ou on pouvait voir autrement que $P = (X^3-1)X - 3X + 1$. Donc si λ est racine de P et de P' alors $-3\lambda + 1 = 0$, autrement dit $\lambda = \frac{1}{3}$, mais $\frac{1}{3}$ n'est pas racine de P'. Donc toutes les racines de P sont simples, et comme P est un polynôme de degré 4, il a 4 racines dans $\mathbb{C}$, qui sont donc toutes distinctes.
10. On fait une décomposition en éléments simples en cherchant a, b, et c tels que $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1+x}{x(x^2+1)}$.

    Pour ça on a plusieurs méthodes. On peut tout mettre au même dénominateur et identifier les coefficients (on obtient $(a+b)x^2 + cx + a = x + 1$). On peut aussi simplement multiplier par x et évaluer en 0 pour obtenir a, ou multiplier par x et prendre la limite en $+\infty$ pour obtenir $a+b$, et évaluer en 1 pour obtenir $a + \frac{b+c}{2}$. Dans tous les cas on doit trouver $a = 1, b = -1, c = 1$.

    Enfin une autre manière est de faire la décomposition sur $\mathbb{C}$ en écrivant $\frac{1+x}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{\beta}{x-i} + \frac{\bar{\beta}}{x+i}$. En multipliant par x et évaluant en 0, on trouve $a = 1$, en multipliant par $x - i$ et évaluant en i, on trouve $\beta = \frac{1+i}{i(i+i)} = \frac{-1-i}{2}$. En remettant au même dénominateur on obtient $\frac{-1-i}{2(x-i)} + \frac{-1+i}{2(x+i)} = \frac{-x+1}{x^2+1}$, ce qui revient au résultat précédent.

    On a donc à trouver une primitive de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$, par exemple (sur $]0, +\infty[$) $F(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan(x) = \ln(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) + \arctan(x)$, qui a bien une limite $F_\infty = \frac{\pi}{2}$ lorsque $x \to +\infty$. On obtient donc $\int_1^\infty \frac{1+x}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x = F_\infty - F(1) = \frac{\pi}{2} - \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.
11. On a $\chi_A(\lambda) = -\lambda[(-3-\lambda)^2 - 4] = -\lambda(-3-\lambda+2)(-3-\lambda-2) = -\lambda(-1-\lambda)(-5-\lambda)$. Les trois valeurs propres sont $0, -1, -5$. Pour trouver les vecteurs propres, on peut résoudre les systèmes linéaires, mais cela va aussi vite en regardant les vecteurs colonnes des matrices.

    Pour un vecteur propre associé à 0, on voit déjà en effet que la première colonne de A est nulle donc $Ae_1 = 0$, le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

    Pour un vecteur propre associé à la valeur propre -5, on regarde $A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et on voit que les deux dernières colonnes sont colinéaires : $(A+5I_3)e_3 = 2(A+5I_3)e_2$, donc $e_3 - 2e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

    Pour un vecteur propre associé à la valeur propre -1, on regarde $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, et en regardant les deux dernières colonnes on voit que $(A+I_3)e_3 + 2(A+I_3)e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4(A+I_3)e_1$, donc $e_3 - 2e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

En résumé, on a donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (la juxtaposition des trois vecteurs propres trouvés) et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (la diagonale des trois valeurs propres correspondantes).