Notions Fondamentales L1–L2
Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 2 (2017).

2 Analyse réelle et un peu plus

2.1 Propriétés de $\mathbb{R}$, suites et séries réelles

Exercice 1 (Mines 2015)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer :

$$\forall\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Exercice 2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
2. $\diamondsuit$ Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'ensemble E des suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ forment un espace vectoriel de dimension 2 (en montrant que $u \in E \mapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire et bijective). En déduire que si le polynôme $X^2 - aX - b$ a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, toute suite (u_n) de E s'écrit sous la forme $u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$. Et retrouver directement le résultat de la question 1.
3. Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1} + u_{n+2}$.
   (a) $\clubsuit$ Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
   (b) $\spadesuit\spadesuit$ Si $u_0 = 1$, calculer les trois chiffres avant et après la virgule de $\dfrac{1}{u_{2017}}$ et de $\dfrac{1}{u_{20^{17}}}$.

Exercice 4 ($\diamondsuit$ Limite sup/inf)**.** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$v_n = \inf_{p\geqslant n} u_p, \quad w_n = \sup_{p\geqslant n} u_p.$$

1. Etudier la monotonie de v et w, et montrer que v et w ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, qu'on note respectivement ℓ_1 et ℓ_2. Justifiez également que
$$\ell_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geqslant n} u_p \leqslant \ell_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geqslant n} u_p.$$
2. Calculer ℓ_1, ℓ_2 dans le cas $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que
$$\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2,$$
et qu'alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la valeur commune $\ell_1 = \ell_2$.
4. $\clubsuit$ Montrer plus généralement que ℓ_1 est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite dont la limite est ℓ_1, et que si ℓ est la limite d'une suite extraite de (u_n), alors $\ell \geqslant \ell_1$.)* De même, ℓ_2 est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
5. $\spadesuit$ Montrer que si $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$, toute valeur $\ell \in [\ell_1, \ell_2]$ est valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. ♣ Théorème de Césaro : on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que le résultat précédent est valable si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
3. Trouver un contre-exemple à la réciproque du théorème de Césaro.
4. Réciproque partielle du théorème de Césaro : Montrer que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que (u_n) est supposée monotone, alors (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 6. Soit P_n le polynôme $X^n + X - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique racine positive x_n de P_n (il peut exister d'autres racines de P_n qui soient négatives).
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
3. En posant $\varepsilon_n = 1 - x_n$, montrer que $\varepsilon_n > 0$ et que $\ln(-\ln(1-\varepsilon_n)) = \ln(-\ln\varepsilon_n) - \ln n$. En déduire que $\ln\varepsilon_n \sim -\ln n$, puis que $x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$, lorsque $n \to \infty$.
4. ♠ Déterminer deux autres termes dans le développement asymptotique de x_n.

Exercice 7. On sait que $e = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$.
2. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 8. Séries convergentes, mais pas absolument convergentes.

1. Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, montrer que la série $\sum_n u_n$ est convergente, de somme S strictement positive (on peut montrer qu'elle vaut $\ln 2$, mais ce n'est pas l'objet de l'exercice), mais pas absolument convergente.
2. On pose φ la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, suivant le reste de la division de n par 3 :
$$\varphi(n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 3k \\ 4k+1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 4k+3 & \text{si } n = 3k+2. \end{cases}$$
Ainsi les images de $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ sont $0, 1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, \ldots$. Montrer que φ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et en notant $v_n = u_{\varphi(n)}$, que $v_{3k} + v_{3k+1} + v_{3k+2} = \frac{1}{2}(u_{2k} + u_{2k+1})$. En déduire que $\sum v_n$ est convergente, de somme $\frac{1}{2}S$.
3. ♠ Soit $\sum a_n$ une série convergente, mais pas absolument convergente, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Construire une permutation σ de $\mathbb{N}$ (une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.
4. ♠ Sous les mêmes hypothèses, construire une permutation $\widetilde{\sigma}$ de $\mathbb{N}$ telle que si on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{\widetilde{\sigma}(n)}$, alors la suite (S_n) a pour valeurs d'adhérence $\overline{\mathbb{R}}$ tout entier (i.e. que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ on peut extraire de (S_n) une suite qui converge vers α).

Exercice 9. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que (a_n) est croissante et tend vers $+\infty$. On cherche à trouver une série $\sum u_n$ à termes positifs qui soit convergente, mais telle que $\sum a_n u_n$ soit divergente. Montrer que $u_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$ (pour $n \geqslant 1$) convient. On pourra utiliser la comparaison $\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} \geqslant \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
2. ♣ On suppose que la série $\sum a_n$ converge. On cherche à trouver une suite de réels strictement positifs c_n tels que $a_n = o(c_n)$ et que la série $\sum c_n$ converge. Montrer que $c_n = \frac{a_n}{(R_n)^\alpha}$ convient si $\alpha \in]0, 1[$, avec $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
3. ♣ On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. On cherche à trouver une suite de réels strictement positifs d_n tels que $d_n = o(a_n)$ et que la série $\sum d_n$ diverge. Montrer que $d_n = \frac{a_n}{S_n}$ convient, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On pourra montrer que la somme partielle des d_n n'est pas de Cauchy.

Exercice 10. On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ a un grand cycle s'il existe $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ des entiers de $[\![1, 2n]\!]$ tous distincts deux à deux tels que $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. ♣ Montrer que la proportion p de permutations ayant un grand cycle parmi les permutations de $\mathcal{S}_{2n}$ est $p = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. Montrer que $p \leqslant \ln(2) \approx 0,693\dots$.
3. ♣ Un étudiant en marketing a enfermé 130 élèves de L3 Maths appliqués dans un donjon. Il leur explique qu'il a écrit chacun de leurs noms dans des coffres alignés dans une salle isolée, et leur propose de jouer à un jeu pour éventuellement les libérer. Une stratégie peut être établie à l'avance, mais ensuite les élèves ne pourront plus communiquer, et iront successivement dans la salle et pourront ouvrir au maximum chacun 65 coffres, puis devront tous les refermer et sortir de la salle. Le mauvais bougre leur explique qu'il les libèrera si chaque élève, au moment de son passage dans la pièce, trouve le coffre dans lequel est écrit son nom (et qu'il les gardera ensemble dans le donjon s'il y a au moins un échec).

   Déduire de ce qui précède une stratégie pour que les élèves soient libres, avec une probabilité de strictement plus de 30% (et calculer la probabilité de réussite si la stratégie avait été pour tout le monde de tirer uniformément au hasard 65 coffres parmi les 130).

2.2 Espaces métriques, complétude, topologie

Exercice 11. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Comparer $\mathring{\overline{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$, puis $\overline{\mathring{A}}$ et $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

Exercice 12. Soit (E, d) un espace métrique compact.

1. Montrer que (E, d) est complet.
2. ♣ Montrer que si $f : E \to E$ vérifie $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors f admet un unique point fixe (attention au piège tendu avec la première question !), et que toute suite vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce point fixe.

Exercice 13. Théorème du point fixe itéré.

1. Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique. Montrer que pour q fixé, si toutes les suites $(x_{qn+r})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite x (pour $r \in [\![0, q-1]\!]$), alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
2. Si (E, d) est un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle que f^q (la composée q fois $f \circ f \circ \dots \circ f$, pour $q \in \mathbb{N}^*$) est k-contractante, avec $k < 1$, montrer que f admet un unique point fixe, et que toute suite vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce point fixe.

Exercice 14. Théorèmes d'« emboîtés ». Soit (E, d) un espace métrique.

1. Si K_n est une suite de compacts non vides de E emboîtés, c'est à dire que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
2. Si (E, d) est complet, que F_n est une suite de fermés non vides de E emboîtés ($F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), et qu'il existe (δ_n) une suite de réels tendant vers 0 telle que F_n est inclus dans une boule de rayon δ_n pour tout n, alors montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ contient un unique élément $x \in E$.
3. ♣ En prenant E l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (qui est complet pour la norme $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$), et en regardant les éléments e_n de E (où e_n est la suite nulle sauf à l'indice i ou elle vaut 1), trouver un contrexemple de fermés emboîtés non vides, tous inclus dans une boule de rayon δ_0 mais tels que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est vide. Est-ce possible en dimension finie ?

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $C \subset E$ est convexe si pour tout $x, y \in C$, le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y, y \in [0,1]\}$ est inclus dans C.

1. Donnez des exemples de parties convexes, et de parties non convexes de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si C est convexe, alors $\overline{C}$, l'adhérence de C, est convexe.
3. ♣ On suppose que C est convexe et compact, que f est 1-lipschitzienne sur C, et on prend $x_0 \in C$. En considérant les fonctions $f_n : x \in C \mapsto (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{1}{n}f(x_0)$, montrer que f admet un point fixe.
4. ♣ Montrer que si C est convexe, alors $\overset{\circ}{C}$, l'intérieur de C, est convexe.
5. ♠ Montrer que si $\overset{\circ}{C}$ est non vide, alors $\overline{\overset{\circ}{C}} = \overline{C}$ et $\overset{\circ}{\overline{C}} = \overset{\circ}{C}$. Montrer que si $\overset{\circ}{C}$ est vide alors $\overset{\circ}{\overline{C}}$ l'est aussi dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, mais pas dans n'importe quel espace vectoriel normé.

Exercice 16. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie naturelle.

1. (a) Montrer qu'un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dense si et seulement si U rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.
   (b) ♣ Etant donné U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}^n$, montrer que $U \cap V$ est aussi un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Est-ce encore vrai si U et V ne sont plus nécessairement ouverts ?
2. On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact s'il existe une suite croissante de parties compactes $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_k$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (b) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, distinct de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $k \in \mathbb{N}$.
   Pour $y \notin U$, on pose $F_y = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - y\|_2 \geqslant \frac{1}{k+1}\}$. Montrer que F_y est un fermé, et en déduire que $K_k = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\|_2 \leqslant k + 1 \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus U, \|x - y\|_2 \geqslant \frac{1}{k+1}\}$ est compact.
   (c) En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est σ-compact.
   (d) La notion de σ-compacité dépend-elle de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel. On suppose qu'on a une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, et que $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour $x, y \in E$ (N est appelée une semi-norme sur E).
On définit la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow N(x - y) = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$, alors $x + y\mathcal{R}x' + y'$ et $\lambda x\mathcal{R}\lambda x'$. On peut donc définir une addition $\bar{+}$ et une multiplication par un scalaire sur $E/\mathcal{R}$, par $\bar{x}\bar{+}\bar{y} = \overline{x + y}$ et $\lambda\bar{\cdot}\bar{x} = \overline{\lambda \cdot x}$. On peut alors vérifier que ces opérations munissent l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ d'une structure d'espace vectoriel, appelé espace vectoriel quotient.
3. Montrer que N passe au quotient, au sens où si $x\mathcal{R}x'$ alors $N(x) = N(x')$. On peut donc définir une application $\bar{N} : E/\mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ par $\bar{N}(\bar{x}) = N(x)$.
4. Montrer que $\bar{N}$ est une norme sur l'espace vectoriel quotient $E/\mathcal{R}$.
5. Exemple : $E = C^1([0,1])$, et $N(f) = \|f'\|_\infty$. Expliciter en français ce que signifie la relation d'équivalence. Montrer que $E/\mathcal{R}$ est en bijection linéaire avec l'ensemble $E_0 = C^1_0([0,1])$ des fonctions dont la moyenne est nulle, muni de $N_0 = N|_{E_0}$ (la restriction de N à E_0, qui est cette fois-ci une norme sur E_0). Montrer que cet isomorphisme $\Phi : E_0 \to E/\mathcal{R}$ peut être choisi de façon à être une isométrie (conservation de la norme) : $\bar{N}(\Phi(f)) = N_0(f)$.
   Remarque : on pourra penser aussi à la relation « être égales presque partout » pour les fonctions de carré intégrable, dont l'espace vectoriel quotient est L^2.

2.3 Fonctions réelles et un peu plus

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante.

Exercice 19. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de l'existence d'une bijection continue entre $[0,1]$ et $\mathbb{R}$? Et entre $]0,1[$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 20.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux,} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

   Déterminer en quels points f est ou n'est pas continue.

Exercice 21. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est bornée, et qu'elle atteint ses bornes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^n \leqslant C_n e^{2|x|}.$$

Exercice 22 (Mines 2015)**.** Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Montrer que f atteint son maximum en a ou en b.
2. Même question sans supposer que f est dérivable.

Exercice 23. Points fixes pour des fonctions $[0, 1] \to [0, 1]$.

1. Montrer qu'une fonction continue $[0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe.
2. Montrer qu'une fonction croissante $[0, 1] \to [0, 1]$ admet un point fixe.

Exercice 24. ♣ Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g : [-\frac{1}{e}, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \geqslant -\tfrac{1}{e},\ g(x) \ln g(x) = x.$$

Exercice 25. Fonctions continues et dénombrabilité.

1. Montrer qu'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'a qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.
2. ♣ Montrer qu'une fonction convexe de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est continue et dérivable à gauche et à droite sur $]a, b[$, et n'a qu'un nombre dénombrable de points où elle n'est pas dérivable.
3. ♣ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant un extremum local en tout point. Que dire de f ? On pourra « compter » les valeurs maximales (l'ensemble $\{f(x), x \in M\}$ où l'ensemble M est l'ensemble des points où f admet un maximum local : $M = \{x, \exists \delta > 0, \forall y \in]x - \delta, x + \delta[, f(x) \geqslant f(y)\}$).

Exercice 26. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

Exercice 27. ♠ Généralisation du théorème des accroissements finis.
Si f est continue sur $[a, b]$ et de classe C^n sur $]a, b[$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(a + \tfrac{k}{n}(b - a)) = (-1)^n \frac{(b - a)^n}{n^n} f^{(n)}(c).$$

Exercice 28. ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|.$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 29.

1. Si f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \to +\infty$ et que $g(x) \sim f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, montrer que $\ln f(x) \sim \ln g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. ♣ En notant $\mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, calculer la limite de $(\mathrm{ch}\sqrt{x+1} - \mathrm{ch}\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 30.

1. Rappelez la définition de la continuité uniforme d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle.
2. Trouver une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. ♣ Enoncer et démontrer le théorème de Heine.
4. ♣ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant ax + b.$$
5. ♠ Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse, même si on suppose f continue, positive, et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 31. « Racine » continue de l'exponentielle.

1. ♠ Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\forall z \in \mathbb{C}, f \circ f(z) = e^z$? On pourra d'abord montrer qu'une telle fonction est alors $2i\pi$ périodique.
2. ♠ Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = e^x$. Peut-on décrire simplement toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pas forcément continues) telles que $f \circ f = \exp$?

2.4 Suites et séries de fonctions

Exercice 32. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur un sous-ensemble A non borné de $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$\forall x \in A, \quad |P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leqslant 1.$$
2. Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_{n_0}$ quand $n \geqslant n_0$?
3. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 33. Soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

Exercice 34. On pose
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est bien définie et de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
2. Etudier la monotonie et la convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4. ♣ Déterminer un équivalent de la fonction ζ en 1^+.
5. ♣ Etablir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

Exercice 35. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (autrement dit, calculer la limite simple, et établir si la convergence est uniforme ou non).

Exercice 36. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$g_n : x \mapsto n\left[f(x + 1/n) - f(x)\right].$$

1. On suppose f deux fois dérivables de dérivée seconde bornée. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' (sur $\mathbb{R}$).
2. ♣ On suppose f de classe C^1. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 37. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que cette série converge normalement si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. ♣ Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 38. Pour $a < b$, on dit qu'une fonction $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe $x_1 < \cdots < x_p$ dans $]a,b[$ tels que, en posant $x_0 = a$ et $x_{p+1} = b$, on ait que pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, φ est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$. Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément sur $]a,b[$ vers une fonction f.

1. Montrer que l'ensemble D des points de discontinuité de f est dénombrable (il peut être fini).
2. ♣ Montrer que f admet une limite à gauche et à droite en tout point de discontinuité.
3. ♣ Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable (il peut être fini). Construire une fonction f croissante, dont l'ensemble des points de discontinuité est D.

Exercice 39. Théorèmes de Dini. On suppose qu'une suite de fonctions continues (f_n) sur $[a,b]$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$.

1. ♣ Si pour tout n, la fonction f_n est croissante, montrer que la convergence est uniforme.
2. ♠ Si pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 40. Non métrisabilité de la convergence simple sur [0,1].
Soit $E = \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ et soit d une distance sur E. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = E \setminus B\left(0, \tfrac{1}{n}\right) = \left\{f \in E,\ \ d(f,0) \geqslant \tfrac{1}{n}\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe n_0 tel que C_{n_0} contient une infinité de fonctions qui sont indicatrices d'un singleton.
2. Montrer qu'on peut choisir une suite dans C_{n_0} qui converge simplement vers 0.
3. En déduire qu'il n'existe pas de distance sur E telle que la convergence pour cette distance soit équivalente à la convergence simple sur $[0,1]$.
4. Pour $\widetilde{E} = \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$, où $X = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable, montrer que la formule

$$\widetilde{d}(f,g) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \max(|f(x_p) - g(x_p)|, 1)$$

définit une distance sur $\widetilde{E}$, et qu'une suite f_n converge simplement vers f sur X si et seulement si $\widetilde{d}(f_n, f) \to 0$.