Notions Fondamentales L1–L2
Feuille d'exercices n° 1 (2017).

1 Retour aux bases

1.1 Symboles, français et rédaction

Exercice 1. Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$.
3. $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geqslant N$.

Pour le n° 1, comprendre l'erreur que l'on aurait pu faire en étudiant le signe de la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut,
2. f possède un minimum,
3. f s'annule au plus une fois,
4. f est monotone.

Exercice 3 (Analyse fonctionnelle 2015 $\diamondsuit$)**.** Soit $f_1, f_2 \in C^0([0,1])$ telles que

$$\forall \varphi \in C^0([0,1]),\quad \int_0^1 f_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f_2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $f_1 = f_2$.

1.2 Logique et raisonnements

Exercice 4. $\diamondsuit$ Soit E un ensemble. Supposons que $P(x)$ et $Q(x)$ désignent des énoncés dépendant de $x \in E$.

1. Montrer que
$$[\exists x \in E,\ P(x) \text{ ou } Q(x)] \Leftrightarrow ([\exists x \in E,\ P(x)] \text{ ou } [\exists x \in E,\ Q(x)]).$$
2. Montrer que l'équivalence précédente n'est plus vraie en remplaçant les « ou » par des « et ».
3. Montrer en utilisant le 1. que
$$[\forall x \in E,\ P(x) \text{ et } Q(x)] \Leftrightarrow ([\forall x \in E,\ P(x)] \text{ et } [\forall x \in E,\ Q(x)]).$$
4. Montrer que $\text{non}(\exists x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x \in E,\ P(x)) \text{ et } \text{non}(\exists x \in E,\ Q(x))]$.

Exercice 5. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas monotone si et seulement si

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R},\ x < y < z \text{ et } \left(f(x) < f(y) > f(z) \text{ ou } f(x) > f(y) < f(z)\right).$$

Exercice 6. $\clubsuit$ A l'aide du nombre $\sqrt{2}$ (irrationnel) et du fait que $(x^y)^z = x^{yz}$, montrer que

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^y \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 7. En notant E la fonction partie entière, montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{2k}{3}\right) = E\left(\frac{n^2}{3}\right).$$

Exercice 8. ♣ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ possède un point fixe.

Exercice 9. ♢ Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

Exercice 10. On s'intéresse aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Déterminer (par analyse-synthèse) toutes ces fonctions parmi celles qui sont

1. dérivables,
2. ♢♣ seulement supposées continues,
3. ♠ seulement supposées bornées sur un intervalle ouvert non-vide, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à l'ensemble suivant : $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists M > 0, \exists a \in \mathbb{R}, \exists b > a, x \in]a, b[\Rightarrow |f(x)| \leqslant M\}$.

1.3 Ensembles

Exercice 11. Écrire en langage mathématique les ensembles suivants (on les écrira chacun de deux façons différentes, par compréhension et par remplacement) :

1. l'ensemble des entiers naturels divisibles par 7,
2. l'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 3,
3. l'ensemble des entiers qui sont la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 12. ♢ Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. Montrer que f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
4. Montrer que f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
5. Trouver des contrexemples pour chacune des implications réciproques.

Exercice 13. ♢ Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E : tous les A_i sont des sous-ensembles de E et on

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E \quad \text{et} \quad (\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$ et $y \in A_i$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et que si, pour $x \in E$ et $i \in I$, on a $x \in A_i$, alors $\bar{x} = A_i$.

Exercice 14. On se place sur $\mathbb{C}$. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence, et déterminer (et dessiner) leurs classes d'équivalence.

1. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$.
2. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow z - z' \in \mathbb{R}$.
3. $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, z = \lambda z'$.

Exercice 15. On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'addition passe au quotient : pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$, alors $(x+y)\mathcal{R}(x'+y')$.
2. En déduire que l'on peut définir une addition $\bar{+}$ sur $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, telle que si $x, y \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \bar{+} \bar{y} = \overline{x+y}$ (et ce de manière unique).
3. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Montrer que l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ passe au quotient par $\mathcal{R}$. En notant π la surjection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ et $\bar{f}$ l'unique application telle que $f = \bar{f} \circ \pi$, montrer que $\bar{f}$ est une bijection entre $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ et $\mathbb{U}$, qui vérifie : $\forall \theta, \varphi \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$, $\bar{f}(\theta \bar{+} \varphi) = \bar{f}(\theta) \times \bar{f}(\varphi)$.

On notera en fait $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ pour $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, et on dira que c'est le groupe quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$, et que $\bar{f}$ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \bar{+})$ et $(\mathbb{U}, \times)$. Pour plus d'exercices sur les structures algébriques et les espaces quotient, on pourra voir la feuille d'exercices supplémentaires associée.

Exercice 16. $\diamondsuit$ Soient E et F des ensembles finis de même cardinal.

1. Montrer que si $E \subset F$, alors $E = F$.
2. Montrer que si $f : E \to F$ est injective, alors elle est bijective.
3. Montrer que si $f : E \to F$ est surjective, alors elle est bijective.

Exercice 17. $\clubsuit$ Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un groupe de n personnes qui se serrent la main (ou pas) pour se dire bonjour. Montrer qu'au moins 2 personnes serrent le même nombre de mains. Attention à bien interpréter le problème en termes mathématiques, en parlant d'ensembles, et traduisant l'énoncé en français par des hypothèses sur les ensembles, et une conclusion !

Exercice 18 ($\diamondsuit$ Transpositions engendrant le groupe symétrique)**.** Pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, on définit $\tau_{i,j}$ l'application de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même telle que $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et $\tau_{i,j}(k) = k$ pour $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}$. Cette application est appelée transposition de i et j.

1. Montrer que $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$, et que $\varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$.
2. Pour $i,j,k \in [\![1,n]\!]$ deux à deux distincts, montrer que $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j} \circ \tau_{i,k} = \tau_{j,k}$.
   En déduire que pour $i > 2, \varepsilon(\tau_{1,i}) = \varepsilon(\tau_{1,2})$, puis que pour $i \neq j$, avec $i \neq 1$ et $j \neq 1$, on a $\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{1,i})$. En conclure que toutes les transpositions sont de signature -1.
3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer par récurrence que σ peut s'écrire comme la composition d'un nombre fini m de transpositions, et que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ où m est le nombre de transpositions utilisées (on considère que l'identité de $[\![1,n]\!]$ est la composition de 0 transpositions). Montrer que l'on peut prendre $m \leqslant n-1$.
4. En déduire que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme la composition d'au plus $3n-3$ transpositions de la forme $\tau_{1,i}$ pour des $i > 1$ (certaines pouvant être comptées plusieurs fois). Montrer en fait par récurrence que moins de $2n-3$ transpositions de la sorte suffisent, dès que $n \geqslant 2$.
5. $\clubsuit$ Montrer par récurrence que toute transposition de la forme $\tau_{1,i}$ peut s'écrire comme la composition de transpositions de la forme $\tau_{j,j+1}$ pour des j dans $[\![1,i-1]\!]$. En déduire que l'on peut exprimer toute permutation de $\mathcal{S}_n$ comme composition de transpositions de la forme $\tau_{j,j+1}$ pour des j dans $[\![1,n-1]\!]$.
   Expliquer en quoi ce dernier résultat signifie que l'on peut trier un paquet de cartes en échangeant successivement deux cartes consécutives. En donner une méthode directe, en français, et expliquer pourquoi on peut le faire en moins de $\frac{n(n-1)}{2}$ coups.
6. $\spadesuit$ On se donne un ensemble de k transpositions avec $k < n-1$. Peut-on écrire toute permutation de $\mathcal{S}_n$ comme la composition de transpositions provenant uniquement de cet ensemble (certaines pouvant être utilisées plusieurs fois) ?

Exercice 19. Soit $k \in [\![2,n]\!]$, et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des éléments de $[\![1,n]\!]$ deux à deux distincts. On définit une application $c : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ par $c(a_i) = a_{i+1}$ si $i \in [\![1,k-1]\!]$, $c(a_k) = a_1$, et $c(j) = j$ si $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{a_1,\ldots,a_k\}$. Cette application est appelée un cycle de longueur k, et $\{a_1,\ldots,a_k\}$ est appelé le support du cycle. On utilise la notation suivante pour désigner les cycles : $c = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$.

1. Montrer que $c \in \mathcal{S}_n$, et exprimer c^{-1} sous la forme d'un cycle.
2. Montrer que la signature de $(1\ 2\ \ldots\ k)$ est $(-1)^{k-1}$.
3. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma(i) = a_i$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Montrer ensuite que dans ce cas on a alors $\sigma \circ (1\ 2\ \ldots\ k) \circ \sigma^{-1} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$. En déduire la signature de c.
4. Montrer que si c_1 et c_2 sont deux cycles à supports disjoints, alors $c_1 \circ c_2 = c_2 \circ c_1$.
5. $\spadesuit$ Montrer que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose en produit (composition) de cycles à supports disjoints deux à deux, et que cette décomposition est unique, à l'ordre de la composition près. On pourra introduire une relation d'équivalence « être dans le même cycle » sur $[\![1,n]\!]$. En déduire une expression de la signature d'une permutation de $\mathcal{S}_n$ en fonction du nombre de cycles de sa décomposition, de son nombre de points fixes et de n.

Exercice 20 (Nombre minimal de générateurs de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$)**.** Soit E un ensemble de permutations. On dit que $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$, constitué des permutations paires) est engendré par E si toute permutation de $\mathcal{S}_n$ (resp. de $\mathcal{A}_n$) peut s'écrire comme la composition d'éléments de E (certains pouvant être utilisés plusieurs fois).

1. Montrer que si $n \geqslant 3$ (resp. $n \geqslant 4$) et que E n'a qu'un élément, il ne peut pas engendrer $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$).
2. $\clubsuit$ Montrer que $\tau = (1\ 2)$ et $c = (1\ 2\ \ldots\ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$ (on pourra utiliser l'exercice 18).
3. $\spadesuit$ Montrer que $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2\ \ldots\ n)$ engendrent $\mathcal{A}_n$ pour n impair, et que $(1\ 2\ 3)$ et $(2\ 3\ \ldots\ n)$ engendrent $\mathcal{A}_n$ pour n pair.

Exercice 21 (♠ Mines MP 2012)**.** Trouver les n tels qu'il existe une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ telle que $k \mapsto |\sigma(k)-k|$ soit injective.

Exercice 22. ♢ On définit le déterminant de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $x_1, \dots, x_n$ (où pour $j \in [\![1, n]\!]$, x_j est le vecteur $(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$) par :

$$\det(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}.$$

De même, pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $\det(A)$ comme le déterminant de ses n colonnes.

1. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_n, \det(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon(\varphi) \det(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)} \dots, x_{\varphi(n)})$ (on dit que det est antisymétrique).
2. Montrer que det est une forme n-linéaire alternée, et que $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A^T) = \det(A)$.
4. ♣ Montrer la formule de développement par rapport à une ligne : si on note $\hat{A}_{i,j}$ la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j, alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\hat{A}_{i,j}).$$
5. ♣ En déduire que si l'on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice de taille $n\times n$ dont le coefficient à la ligne i et colonne j est $(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{i,j})$, alors on a
$$A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A)\, I_n.$$

Exercice 23. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit la matrice P_σ comme celle ayant les colonnes $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour $\sigma, \varphi \in \mathcal{S}_n$, $P_{\sigma\circ\varphi} = P_\sigma \times P_\varphi$.
2. Montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 24. Bijections explicites entre ensembles dénombrables.

1. En écrivant un entier non-nul le produit d'un nombre impair et d'une puissance de deux, donner une formule d'une bijection explicite entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que l'application f définie par la formule suivante est une bijection entre $\mathcal{P}_{\text{fini}}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$) et $\mathbb{N}$:
$$\forall A \in \mathcal{P}_{\text{fini}}(\mathbb{N}),\ f(A) = \sum_{k\in A} 2^k.$$
3. En écrivant la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier non-nul, en déduire une décomposition « en facteurs premiers » d'un rationnel strictement positif. En utilisant une bijection explicite entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, obtenir une bijection explicite entre les rationnels strictement positifs et les entiers naturels, puis entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$, et donc enfin entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$.

Exercice 25. ♣ Bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1. Donner un exemple de bijection entre $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$.
2. Expliquer pourquoi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (les suites ne prenant que 0 et 1 comme valeurs). On note F l'ensemble des suites de $\{0, 1\}^N$ constantes à partir d'un certain rang. Montrer que F est en bijection avec $\mathbb{N}$.
3. On note $E = \{0, 1\} \setminus F$, et pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $f(a) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{2^{n+1}}$.

   Montrer que f est une application injective de E dans $\mathbb{R}$, et que $f(E) \subset]0, 1[$.
4. Montrer que $]0, 1[\setminus f(E) = \{x \in]0, 1[, \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in [\![0, 2^n - 1]\!], x = \frac{2k+1}{2^{n+1}}\}$ (ces nombres sont appelés nombres dyadiques). En déduire que $]0, 1[\setminus f(E)$ est en bijection avec F.
5. En déduire que $]0, 1[$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et donc que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
6. À partir d'une telle bijection entre $\mathbb{R}$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, construire une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26 (Argument diagonal de Cantor)**.** Soit E un ensemble et f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. En considérant l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$, montrer que f n'est pas surjective.
Remarque : On a donc montré qu'il n'existe pas de surjection (et donc pas de bijection) de E sur $\mathcal{P}(E)$. C'est historiquement pour montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ n'étaient pas en bijection que Cantor a développé cette méthode (par l'exercice précédent, on a que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Exercice 27. Montrer que $\mathbb{Q} \cap [0,1[$ et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ sont en bijection. Est-ce que $]0,1[$ et $[0,1[$ sont en bijection ? Si c'est le cas, en expliciter une.

Exercice 28 (♠ Théorème de Cantor-Bernstein)**.** Soit E et F deux ensembles. Supposons qu'il existe deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ qui soient toutes les deux injectives. Montrer que l'on peut construire une bijection entre E et F à partir de f et g.
Indication : Montrer que construire une application φ bijective $E \to F$ telle que $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ pour $x \in E_0$ (où $E_0 \subset g(F)$) et $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \notin E_0$, revient à trouver un point fixe d'une application $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ (à déterminer). Construire alors un tel point fixe par itération et « limite » (s'inspirer de la démonstration du théorème de point fixe pour la construction).

Exercice 29. ♣ « Cardinalité » de l'ensemble des fonctions continues.

1. Construire une injection (simple !) de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$.
2. Étant donnée une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, construire une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}^{\mathbb{N}})$ (penser à « $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ »).
3. Étant donnée une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et une bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, en déduire une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que l'on peut construire une injection de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 30 (♣ Relations d'ordre)**.** Soit E un ensemble. On dit qu'une relation $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre si elle est réflexive ($\forall x \in E, x \preccurlyeq x$), antisymétrique ($\forall x, y \in E, x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$), et transitive ($\forall x, y, z \in E, x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$). On dit que E est

— totalement ordonné par $\preccurlyeq$ si $\forall x, y \in E, x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$,
— bien ordonné par $\preccurlyeq$ si toute partie non vide admet un plus petit élément (on dit que x est un plus petit élément de $A \subset E$ si $x \in A$ et $\forall y \in A, x \preccurlyeq y$).

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par $\leqslant$ (la relation d'ordre usuelle sur les réels), mais pas bien ordonné.
2. Montrer que $\mathbb{N}$ est bien ordonné par $\leqslant$. Pour montrer (par contraposée) que si $A \subset \mathbb{N}$ n'admet pas de plus petit élément, alors $A = \emptyset$, on pourra poser $B = \mathbb{N} \setminus A$ et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, [\![0, n]\!] \subset B$.
3. Si E est un ensemble, montrer que $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$, qui vérifie la propriété de la borne inférieure : pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{A}$ admet un plus grand minorant (c'est à dire un élément $M \in \mathcal{P}(E)$ telle que $\forall A \in \mathcal{A}$, $M \subset A$, et telle que si $M' \in \mathcal{P}(E)$ vérifie $\forall A \in \mathcal{A}$, $M' \subset A$, alors $M' \subset M$). Montrer qu'elle vérifie aussi la propriété de la borne supérieure : pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{A}$ admet un plus petit majorant.
4. On définit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par : $(a, b) \preccurlyeq (c, d) \Leftrightarrow a < b$ ou ($a = b$ et $c \leqslant d$).
   (a) Montrer que cette relation est une relation d'ordre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est bien ordonné par $\preccurlyeq$.
   (b) Montrer qu'il n'existe pas de bijection croissante de $\mathbb{N}$ (pour l'ordre $\leqslant$) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pour l'ordre $\preccurlyeq$), c'est à dire pas de fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ qui soit bijective et telle que $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \leqslant b \Rightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$.
5. ♠ On définit l'ordre lexicographique sur $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (suites de zéros et de uns) par
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \preccurlyeq (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow a = b \text{ ou } \exists i \in \mathbb{N}, [a_i < b_i \text{ et } (\forall j \in \mathbb{N}, j < i \Rightarrow a_j = b_j)].$$
   Montrer que E est totalement ordonné par $\preccurlyeq$, mais pas bien ordonné.
6. ♠ On se donne un alphabet A (un nombre fini de lettres données dans un ordre précis). Définir l'ensemble $m(A)$ des mots de A (nombre finis de lettres à la suite) et l'ordre lexicographique sur $m(A)$ (correspondant à l'ordre du dictionnaire). Montrer que si A a au moins deux lettres, alors $m(A)$ est totalement ordonné par cette relation d'ordre, mais pas bien ordonné.