Université Paris-Dauphine
L3 Maths
Notions fondamentales L1/L2

Octobre 2015, Examen. Durée : 2 heures

Documents et calculatrice non autorisés.

La qualité de la rédaction sera un élément déterminant dans la notation. Sauf précision contraire, on demande une justification de toute assertion.
Les fautes graves pourront être sanctionnées par des points négatifs.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes, et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n sur $\mathbb{R}$. En particulier, $C^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, on associe la fonction $\phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt.$$

1 Préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes. Certains résultats pourront servir dans la suite du sujet.

1. On définit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et étudier le signe de φ' sur $\mathbb{R}^*$. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Calculer les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$, et montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

2. Rappeler la formule du binôme de Newton *(développement de* $(a+b)^n$ *où* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*)*. Etant donné $k \in \mathbb{N}$, écrire le polynôme $P_k = X^{k+1} - (X-1)^{k+1}$ sous forme développée, et montrer en particulier que c'est un polynôme de degré k.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$, n'ayant qu'une seule valeur propre. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est proportionnelle à la matrice identité.

2 Généralités sur ϕ

1. Montrer que ϕ est bien défini, et est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

2. On fixe $f \in C^0(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(f)(x) = \int_0^1 f(x+u-1)du.$$

   (b) On suppose f paire. Exprimer $\phi(f)(-x)$ en fonction de $\phi(f)(x+1)$. Donner une interprétation graphique.
   (c) On suppose f croissante. Peut-on en déduire que $\phi(f)$ est croissante ? Donner une interprétation graphique.

3 Injectivité/Surjectivité de ϕ

1. Montrer que pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$, $\phi(f)$ est une fonction de classe C^1, et donner sa dérivée. Plus généralement, et sans justification, donner des conditions sur les entiers naturels k et j pour avoir $\phi(C^k(\mathbb{R})) \subset C^j(\mathbb{R})$?

2. Montrer que le noyau de ϕ est constitué des fonctions continues 1-périodiques dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle.

3. Montrer très rigoureusement que l'endomorphisme ϕ n'est ni injectif, ni surjectif.

4 Restriction à $\mathbb{R}_n[X]$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace stable par ϕ. Ainsi on peut noter $\phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ *(on montrera en particulier que la matrice est triangulaire supérieure, et que les termes de la diagonale sont égaux à une valeur fixe que l'on précisera).*

3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n. L'endormorphisme ϕ_n est-il diagonalisable ?

5 Eléments propres de ϕ

Montrer que si $\lambda > 0$, alors il existe une fonction de type exponentielle (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto e^{ax}$ où a est un réel) qui est vecteur propre de ϕ, associée à λ.