Méthodes numériques : optimisation.
L3 2016–2017 — 2e semestre.
Feuille de TD n° 1 : Optimisation en dimension un.

1 Ordre de convergence des suites.

(a) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) + 1.$$

Montrer que la suite (x_n) converge linéairement.
Indication : montrer d'abord que $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Que peut-on dire sur le taux de convergence linéaire ?

(b) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge avec un ordre supérieur ou égal à 2. *Indication :* montrer d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$.

(c) * On pose $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge et avec un ordre supérieur ou égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. *Indication :* en posant $y_n = x_{n+1} - x_n$, montrer que $(x_{n+1}+x_n)y_{n+1} = -y_n(y_n+y_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. Puis que $|y_{n+1}| \leqslant |y_n||y_{n-1}|$.

En séance de TP, on représentera graphiquement ces suites pour visualiser leur vitesse de convergence.

2 Précision numérique des méthodes de différences finies.

(a) On suppose qu'on a codé une fonction `f` d'une variable réelle. Que renvoie le programme suivant ?

```
eps=1e-20
(f(1+eps)-f(1))/eps
```

On cherche à comprendre quelle valeur affecter à la variable `eps` pour que le calcul précédent soit une bonne approximation de la dérivée en 1.

(b) On suppose que l'on se place sur un intervalle $[a, b]$ où f est de classe C^2, et où f et f'' sont du même ordre de grandeur : $\|f''\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$, où C est une constante « du même ordre de grandeur que 1 ». On se donne une approximation $\hat{f}$ de f qui a une précision relative η : $|\hat{f}(x) - f(x)| \leqslant \eta\|f\|_\infty$. Montrer que l'on a pour tout $x \in [a, b - \varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x)}{\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{2\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon}{2}\right]\|f\|_\infty.$$

Comment se comporte le ε qui minimise le terme de droite de cette inégalité par rapport à η ? Donner alors l'ordre de grandeur de l'erreur finale entre la dérivée au point x et l'approximation par différence finie en utilisant $\hat{f}$.

(c) Mêmes questions avec la formule de la différence finie centrée. On suppose cette fois-ci que f est de classe C^3 et que $f^{(3)}$ est du même ordre de grandeur que f : $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Démontrer que pour tout $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon^2}{6}\right]\|f\|_\infty.$$

Quel est cette fois le bon choix de ε par rapport à η ? Comment se comporte l'erreur finale en fonction de η ?

En TP, on observera la cohérence de ces résultats théoriques avec des calculs effectifs.

3 Problème d'application : plus court chemin entre deux zones parcourues à deux vitesses différentes.

On cherche à modéliser un problème de plus court chemin entre deux zones de $\mathbb{R}^2$ parcourues à deux vitesses v_1 et v_2. On se donne par exemple une fonction f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on définit $Z_1 = \{(x, y), y \geqslant f(x)\}$ et $Z_2 = \{(x, y), y \leqslant f(x)\}$ les deux zones : au-dessus et en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. On se donne un point A dans Z_1, un point B dans Z_2, et un point M sur la courbe $\mathcal{C}$. On cherche à minimiser le temps de parcours de A à B, sachant qu'on se déplace en ligne droite sur chacune des zones aux vitesses v_1 et v_2 avec $v_1 > v_2$.

(a) Faire un dessin.

(b) On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{M \in \mathcal{C}} \frac{\|AM\|}{v_1} + \frac{\|BM\|}{v_2}.$$

Montrer qu'il peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction réelle d'une variable, et qu'il admet une solution atteinte pour un certain point $M_* \in \mathcal{C}$. Montrer que le segment $[AM_*]$ est inclus dans Z_1 et que le segment $[BM_*]$ est inclus dans Z_2, et que donc on obtient une solution à notre problème initial.

(c) * Montrer que la solution vérifie les lois de Descartes de la réfraction : si on note $n_1 = \frac{1}{v_1}$, $n_2 = \frac{1}{v_2}$ (appelés indices de réfraction), et θ_i (resp. θ_r) l'angle entre la normale à la courbe et la droite (AM) (resp. (BM)), appelé angle d'incidence (resp. de réfraction), on a :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

La lumière prend donc le plus court chemin !

Montrer par un dessin que si on suppose que $v_1 < v_2$, alors il peut ne pas y avoir unicité à la solution.

(d) * On s'intéresse au problème de minimiser le chemin entre A et un autre point A' de Z_1, en passant par un point de la courbe. Montrer que cela peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonction réelle d'une variable, et montrer que cette fois ci la solution vérifie les lois de Descartes de la réflexion : $\theta_i = \theta_r$.

Montrer que la solution n'est pas forcément unique si f est convexe : on peut voir des choses en double dans un miroir concave !

En TP, on programmera différentes méthodes du cours pour résoudre les problèmes d'optimisation en dimension un, et on les appliquera à ce problème de plus court chemin.

4 Méthodes de Newton et de la sécante en dimension 1 (partiel de mars 2016)

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à minimiser f en approchant un zéro de f' par la méthode de la Newton. On se fixe un réel $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer la dérivée et la dérivée seconde de f.
   (b) Montrer que les itérées de la méthode de Newton sont bien définies pour tout $k \geqslant 0$, et sont données par la relation de récurrence $x_{k+1} = -x_k^3$.
   (c) En déduire l'ensemble des x_0 pour lesquels la suite converge, et donner l'ordre de convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans ces cas-là. Est-ce en contradiction avec les résultats donnés dans le cours ? Pourquoi dit-on que la méthode de Newton n'est pas robuste ?

2. On s'intéresse aux fonctions unimodales sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et dont la dérivée est strictement convexe. On se donne une telle fonction, que l'on note g, et on note x_* son unique minimum sur $\mathbb{R}$.
   (a) La fonction f de la première question satisfait-elle ces hypothèses ? Donner un exemple d'une telle fonction (un bon dessin vaut mieux qu'un long discours).
   (b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g''(x) > 0$.
   (c) En utilisant l'interprétation graphique de la méthode de Newton par rapport au graphe de g', mettre en évidence (à l'aide d'un dessin propre et d'arguments convaincants) le fait que si $x_0 > x_*$, alors les itérées de la méthode pour la fonction g en partant de x_0 sont bien définies et satisfont $x_* < x_{k+1} < x_k$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (d) En déduire que la méthode de Newton appliquée à la fonction g définit bien une suite d'itérées qui converge vers x_* quel que soit le point de départ $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (e) En utilisant l'interprétation graphique de la méthode de la sécante par rapport au graphe de g', mettre en évidence (à l'aide d'un dessin propre et d'arguments convaincants) le fait que si $x_0 > x_1 > x_*$, alors les itérées de la méthode pour la fonction g en partant de x_0 et x_1 sont bien définies et satisfont $x_* < x_{k+2} < x_{k+1} < x_k$ pour tout $k \geqslant 0$, puis que la suite x_k converge vers x_*.
   (f) * Montrer que dans tous les cas où x_0, x_1 et x_* sont deux à deux distincts, la méthode de la sécante définit bien une suite d'itérées qui converge vers x_*.
3. * On considère la fonction f de la question 1. Montrer que si la suite des itérées de la méthode de la sécante est bien définie jusqu'au rang $k \geqslant 1$ et que $x_k \neq x_{k-1}$, alors elle est bien définie au rang $k+1$ et que l'on a alors

$$x_{k+1} = -x_k x_{k-1} \frac{x_k\sqrt{1+x_{k-1}^2} + x_{k-1}\sqrt{1+x_k^2}}{\sqrt{1+x_{k-1}^2} + \sqrt{1+x_k^2}},$$

   puis en déduire que $|x_{k+1}| \leqslant |x_k||x_{k-1}| \max(|x_k|, |x_{k-1}|)$.
   En déduire que si $0 < |x_1| < |x_0| < 1$ alors la suite des $|x_k|$ est bien définie, strictement décroissante et il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que pour tout $k \geqslant 0$, on ait $|x_k| \leqslant \alpha^{2^k}$ (on pourra trouver un α qui convient pour $k = 0$ et $k = 1$ et montrer le cas général par récurrence, on pourra également admettre — ou démontrer — que $|x_k|$ n'est jamais nul). Que peut-on dire sur l'ordre de convergence de la suite ? Est-ce en contradiction avec les résultats donnés dans le cours ?