Méthodes numériques : optimisation.
L3 2016–2017 — 2e semestre.
Feuille de TD n° 1 — Éléments de correction

1 Ordre de convergence des suites.

(a) La fonction f définie par $f(x) = x(1-\frac{x}{2})+1$ atteint son maximum en 1 (on a $f'(x) = 1-x$). Ce maximum vaut $\frac{3}{2}$, donc on a toujours $x_{n+1} = f(x_n) \leqslant \frac{3}{2}$. Et donc si $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$, on obtient que $1 - \frac{x_n}{2}$ est positif, et que donc $f(x_n) \geqslant 1$. Par récurrence, on a donc bien $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ dans tous les cas. On a alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= x_n\Big(1 - \frac{x_n}{2}\Big) - x_{n-1}\Big(1 - \frac{x_{n-1}}{2}\Big) \\ &= (x_n - x_{n-1})\underbrace{\Big(1 - \frac{x_n + x_{n-1}}{2}\Big)}_{\in[-\frac{1}{2},0]}. \end{aligned}$$

On a donc le bon critère de convergence linéaire, avec un taux de convergence inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
En fait, comme la suite converge, on obtient que sa limite est $\sqrt{2}$ (les solutions de $f(x) = x$ sont $\pm\sqrt{2}$ seulement). Et donc quel que soit $\delta > 0$, il existe un n à partir duquel $1 - \frac{x_n+x_{n-1}}{2}$ se trouve dans $[1 - \sqrt{2} - \delta, 1 - \sqrt{2} + \delta]$. On en conclut que le taux est inférieur ou égal à $\sqrt{2} - 1 + \delta$ quel que soit $\delta > 0$, donc il est inférieur ou égal à $\sqrt{2} - 1$ (on peut même montrer que c'est égal à ça, en étant un peu précautionneux).

(b) On a déjà en multipliant par $2x_n$ que $2x_{n+1}x_n = x_n^2 + 2$.
On a donc $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 2$, et donc $x_{n+1}^2 \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a ensuite, pour $n \geqslant 1$:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} = \frac{-(x_n - x_{n-1})^2}{2x_n}.$$

Et donc

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|^2}{2|x_n|} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|x_n - x_{n-1}|^2.$$

Comme de plus on a $\frac{1}{2\sqrt{2}}|x_1 - x_0| = \frac{1}{4\sqrt{2}} < 1$, le critère de convergence s'applique, et la suite converge à l'ordre au moins 2. Ce n'est pas un hasard : on a en fait appliqué la méthode de Newton pour trouver un zéro de la fonction $x \mapsto x^2 - 2$.

(c) * On écrit d'abord grâce à la définition de x_{n+1} que

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{x_n + x_{n-1}}.$$

Donc $(x_{n+1} + x_n)y_{n+1} = 2 - x_{n+1}^2$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} y_n(y_n + y_{n-1}) &= (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \\ &= x_{n+1}^2 - x_{n+1}(x_n + x_{n-1}) + x_n x_{n-1} \\ &= x_{n+1}^2 - 2. \end{aligned}$$

En effet, par la définition de x_{n+1} on a bien $x_{n+1}(x_n + x_{n-1}) - x_n x_{n-1} = 2$.
Ensuite on a grâce à la définition de x_{n+1} que

$$y_n + y_{n-1} = x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{2 - x_{n-1}^2}{x_n + x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n + x_{n-1}} y_{n-1}.$$

Donc on obtient

$$y_{n+1} = \frac{-(x_{n-1} + x_{n-2})}{(x_n + x_{n-1})(x_{n+1} + x_n)} y_n y_{n-1}.$$

En écrivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}} + \frac{2}{x_n + x_{n-1}},$$

on obtient que si x_n et x_{n-1} appartiennent à $[1, 2]$, alors on a $x_{n+1} \leqslant 2$ et $x_{n+1} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$. On obtient donc que $x_n \in [1, 2]$ pour tout n. Et on a donc

$$|y_{n+1}| = \frac{|x_{n-1} + x_{n-2}|}{|x_n + x_{n-1}||x_{n+1} + x_n|} |y_n||y_{n-1}| \leqslant \frac{4}{2 \times 2} |y_n||y_{n-1}|.$$

Par récurrence on utilise que $\varphi^2 = \varphi + 1$ pour obtenir que si $|y_{n-1}| \leqslant \alpha^{\varphi^{n-1}}$ et $|y_n| \leqslant \alpha^{\varphi^n}$ alors on aura aussi $|y_{n+1}| \leqslant \alpha^{\varphi^{n-1}} \alpha^{\varphi^n} = \alpha^{\varphi^{n-1}(\varphi+1)} = \alpha^{\varphi^{n+1}}$. Comme on peut trouver $\alpha < 1$ tel que ce soit vérifié par exemple au rang 2 (car $|y_1| = \frac{1}{2}$ et $|y_2| = \frac{1}{14}$ sont strictement inférieurs à 1), alors on l'obtient pour tous les rangs. On a donc $|y_n| \leqslant \alpha^{\varphi^n}$. Comme dans la preuve du cours cela donne bien que x_n converge et que $|x_n - x_\infty| \leqslant C\alpha^{\varphi^n}$ avec $\alpha \in]0, 1[$. Ce n'est pas ici non plus un hasard : on a en fait cette fois-ci appliqué la méthode de la sécante pour trouver un zéro de la fonction $x \mapsto x^2 - 2$.

2 Précision numérique des méthodes de différences finies.

(a) Le programme renvoie 0. En effet au premier calcul de `1+eps`, la machine renvoie `1` (les réels 1 et $1 + 10^-20$ sont codés par le même nombre à virgule flottante). Si la fonction est déterministe, les deux calculs successifs de `f` appliqués au nombre à virgule flottante 1 renvoient la même chose, et le résultat final est donc zéro.

(b) On utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 pour obtenir

$$\left| \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} - f'(x) \right| = \frac{1}{2} |f''(x + \theta_\varepsilon)\varepsilon| \leqslant \frac{C\varepsilon}{2} \|f\|_\infty,$$

avec $\theta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$. On obtient l'inégalité demandée par simple inégalité triangulaire. La dérivée du terme de droite en ε donne qu'il est minimal pour $\varepsilon = 2\sqrt{\frac{\eta}{C}}$, et l'erreur est alors inférieure à $2\sqrt{C\eta}\|f\|_\infty$. On a donc une erreur relative d'ordre $\sqrt{\eta}$.

(c) Ici on utilise deux foix la formule de Taylor à l'ordre 3. Les dérivées secondes se simplifient et on obtient

$$\left|\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}-f'(x)\right|=\frac{\varepsilon^2}{12}|f^{(3)}(x+\theta_\varepsilon^+)+f^{(3)}(x-\theta_\varepsilon^-)|\leqslant\frac{C\varepsilon^2}{6}\|f\|_\infty,$$

avec θ_ε^+ et θ_ε^- dans $]0,\varepsilon[$. On obtient de même le résultat par inégalité triangulaire. La dérivée du terme de droite s'annule pour $\varepsilon=(\frac{6\eta}{C})^{\frac{1}{3}}$, et on obtient cette fois-ci une erreur relative de l'ordre de grandeur de $\eta^{\frac{2}{3}}$.

3 Problème d'application : plus court chemin entre deux zones parcourues à deux vitesses différentes.

(b) Il suffit de paramétrer le point $M\in\mathcal{C}$ par $(x,f(x))$, et de poser $A=(x_a,y_a)$ et $B=(x_b,y_b)$. On a alors à minimiser la fonction F sur $\mathbb{R}$, où

$$F(x)=\frac{\sqrt{(x-x_a)^2+(f(x)-y_a)^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x-x_b)^2+(f(x)-y_b)^2}}{v_2}.$$

Il est clair que F est continue (puisque f l'est et coercive, puisque chacun des termes tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, quelle que soit la fonction f qu'on se soit donnée. Donc il existe un minimum global, qui est atteint en x_*, ce qui correspond au point $M_*=(x_*,f(x_*))$. Pour le fait que $[AM_*]$ est inclus dans Z_1, c'est toujours le cas vu que Z_1 est convexe. La partie difficile est de montrer que $[BM_*]$ est inclus dans Z_2.
Supposons que $[BM_*]$ n'est pas inclus dans Z_2 (faire un dessin pour voir ce qu'il se passe).
On pose $M(t)=(1-t)B+tM_*$, et $(x(t),y(t))=M(t)$. Il existe donc un point $M(t)$ avec $t\in[0,1]$ tel que $y(t)>f(x(t))$, donc $t\in]0,1[$. Comme on a $y(0)\leqslant f(x(0))$ puisque $B\in Z_2$, on sait donc par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un $t_1\in[0,t[$ tel que $y(t_1)=f(x(t_1))$. Notons M_1 ce point, qui appartient donc à $\mathcal{C}$.
On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\|AM_1\|}{v_1}+\frac{\|M_1B\|}{v_2}&\leqslant\frac{\|AM_*\|}{v_1}+\frac{\|M_*M_1\|}{v_1}+\frac{\|M_1B\|}{v_2}\\&<\frac{\|AM_*\|}{v_1}+\frac{\|M_*M_1\|}{v_2}+\frac{\|M_1B\|}{v_2}=\frac{\|AM_*\|}{v_1}+\frac{\|M_*B\|}{v_2},\end{aligned}$$

en contradiction avec le fait que M_* réalise le minimum.
Donc on a bien deux segments $[AM_*]$ et $[M_*B]$ respectivement dans les zones Z_1 et Z_2, qui sont donc parcourus en ligne droite à la vitesse v_1 et v_2, et qui minimisent le temps de parcours.