Méthodes numériques : optimisation.
L3 2015–2016 — 2e semestre.
Feuille de TD n° 1 : Optimisation en dimension un.

1 Ordre de convergence des suites.

(a) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) + 1.$$

Montrer que la suite (x_n) converge linéairement.
Indication : montrer d'abord que $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Que peut-on dire sur le taux de convergence linéaire ?

(b) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge avec un ordre supérieur ou égal à 2. *Indication :* montrer d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$.

(c) * On pose $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge et avec un ordre supérieur ou égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. *Indication :* en posant $y_n = x_{n+1} - x_n$, montrer que $(x_{n+1}+x_n)y_{n+1} = -y_n(y_n+y_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$. Puis que $|y_{n+1}| \leqslant |y_n||y_{n-1}|$.

En séance de TP, on représentera graphiquement ces suites pour visualiser leur vitesse de convergence.

2 Précision numérique des méthodes de différences finies.

(a) On suppose qu'on a codé une fonction `f` d'une variable réelle. Que renvoie le programme suivant ?

```
eps=1e-20
(f(1+eps)-f(1))/eps
```

On cherche à comprendre quelle valeur affecter à la variable `eps` pour que le calcul précédent soit une bonne approximation de la dérivée en 1.

(b) On suppose que l'on se place sur un intervalle $[a, b]$ où f est de classe C^2, et où f et f'' sont du même ordre de grandeur : $\|f''\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$, où C est une constante « du même ordre de grandeur que 1 ». On se donne une approximation $\hat{f}$ de f qui a une précision relative η : $|\hat{f}(x) - f(x)| \leqslant \eta\|f\|_\infty$. Montrer que l'on a pour tout $x \in [a, b - \varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x)}{\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{2\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon}{2}\right]\|f\|_\infty.$$

Comment se comporte le ε qui minimise le terme de droite de cette inégalité par rapport à η ? Donner alors l'ordre de grandeur de l'erreur finale entre la dérivée au point x et l'approximation par différence finie en utilisant $\hat{f}$.

(c) Mêmes questions avec la formule de la différence finie centrée. On suppose cette fois-ci que f est de classe C^3 et que $f^{(3)}$ est du même ordre de grandeur que f : $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Démontrer que pour tout $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon^2}{6}\right]\|f\|_\infty.$$

Quel est cette fois le bon choix de ε par rapport à η ? Comment se comporte l'erreur finale en fonction de η ?

En TP, on observera la cohérence de ces résultats théoriques avec des calculs effectifs.

3 Problème d'application : plus court chemin entre deux zones parcourues à deux vitesses différentes.

On cherche à modéliser un problème de plus court chemin entre deux zones de $\mathbb{R}^2$ parcourues à deux vitesses v_1 et v_2. On se donne par exemple une fonction f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on définit $Z_1 = \{(x, y), y \geqslant f(x)\}$ et $Z_2 = \{(x, y), y \leqslant f(x)\}$ les deux zones : au-dessus et en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. On se donne un point A dans Z_1, un point B dans Z_2, et un point M sur la courbe $\mathcal{C}$. On cherche à minimiser le temps de parcours de A à B, sachant qu'on se déplace en ligne droite sur chacune des zones aux vitesses v_1 et v_2 avec $v_1 > v_2$.

(a) Faire un dessin.

(b) On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{M \in \mathcal{C}} \frac{\|AM\|}{v_1} + \frac{\|BM\|}{v_2}.$$

Montrer qu'il peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction réelle d'une variable, et qu'il admet une solution atteinte pour un certain point $M_* \in \mathcal{C}$. Montrer que le segment $[AM_*]$ est inclus dans Z_1 et que le segment $[BM_*]$ est inclus dans Z_2, et que donc on obtient une solution à notre problème initial.

(c) * Montrer que la solution vérifie les lois de Descartes de la réfraction : si on note $n_1 = \frac{1}{v_1}$, $n_2 = \frac{1}{v_2}$ (appelés indices de réfraction), et θ_i (resp. θ_r) l'angle entre la normale à la courbe et la droite (AM) (resp. (BM)), appelé angle d'incidence (resp. de réfraction), on a :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

La lumière prend donc le plus court chemin !

Montrer par un dessin que si on suppose que $v_1 < v_2$, alors il peut ne pas y avoir unicité à la solution.

(d) * On s'intéresse au problème de minimiser le chemin entre A et un autre point A' de Z_1, en passant par un point de la courbe. Montrer que cela peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonction réelle d'une variable, et montrer que cette fois ci la solution vérifie les lois de Descartes de la réflexion : $\theta_i = \theta_r$.

Montrer que la solution n'est pas forcément unique si f est convexe : on peut voir des choses en double dans un miroir concave !

En TP, on programmera différentes méthodes du cours pour résoudre les problèmes d'optimisation en dimension un, et on les appliquera à ce problème de plus court chemin.

4 Cas pathologique de la méthode de la sécante (partiel de mars 2015)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à minimiser f en approchant un zéro de f' par la méthode de la sécante. On se fixe des réels x_0 et x_1 avec $x_0 \neq x_1$.

(a) Pour $k \geqslant 1$ et si l'on a $x_k \neq x_{k-1}$, montrer que l'itérée suivante de la méthode de la sécante est bien définie et donnée par la formule :

$$x_{k+1} = x_k\Big(1 - \frac{x_k^2}{x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2}\Big).$$

(b) Si $x_k \neq 0$, on définit $y_k = \frac{x_{k+1}}{x_k}$. Montrer que pour $k \geqslant 1$, si $x_k \neq 0$, on peut définir y_k et y_{k-1} et on a $y_k = h(y_{k-1})$ pour la fonction $h : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

(c) Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$ et en déduire que si $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ et $x_0 \neq -x_1$, alors :
- — pour tout $k \geqslant 1$, y_k est bien défini et $y_k \in [-\frac{1}{3}, 1] \setminus \{0\}$.
- — pour tout $k \geqslant 2$, $y_k \in [\frac{2}{3}, 1[$.
- — pour tout $k \geqslant 3$, $y_k \in]\frac{2}{3}, \frac{15}{19}]$.
- — La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers 0, mais ne converge pas superlinéairement.

(d) Pourquoi dit-on qu'il s'agit d'un cas pathologique de la méthode de la sécante ? Quelle est la particularité de la fonction qui fait qu'on est dans ce cas ?

(e) * Quel est le taux de convergence linéaire de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ et $x_0 \neq -x_1$? On pourra montrer que la fonction h est contractante sur $[\frac{2}{3}, 1]$.