

Méthodes numériques : optimisation.

Partiel du 9 mars 2015

Commentaires

Le premier exercice était calculatoire, le deuxième plus théorique (et avec des questions un peu plus difficiles), et le troisième un peu plus proches des préoccupations que l'on se pose réellement lorsque l'on travaille sur des cas tests numériques.

1 Cas pathologique de la méthode de la sécante

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On cherche à minimiser f en approchant un zéro de f' par la méthode de la sécante. On se fixe des réels x_0 et x_1 avec $x_0 \neq x_1$.

1. On a $f'(x) = 4x^3$, et les itérées sont données, pour $k \geq 1$ et lorsque $f'(x_k) \neq f'(x_{k-1})$ (ce qui est équivalent à $x_k \neq x_{k-1}$), par :

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})},$$

Ce qui, en explicitant les termes, en notant que $x_k^3 - x_{k-1}^3 = (x_k - x_{k-1})(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2)$, et en simplifiant, donne bien le résultat attendu. Comme on a $x_k \neq x_{k-1}$ alors on ne peut pas avoir $x_k^3 - x_{k-1}^3 = 0$, donc on ne peut pas non plus avoir $x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2 = 0$, le dénominateur ne s'annule donc pas.

2. Si $x_k \neq 0$, alors y_k est bien défini, on doit d'abord montrer que y_{k-1} est bien défini, c'est à dire que $x_{k-1} \neq 0$. Mais si on avait $x_{k-1} = 0$, d'après la formule précédente (si $k \geq 2$, pour $k = 1$ on sait que $x_0 \neq 0$), on aurait $x_k = 0$.

On peut donc diviser par x_k l'égalité de la question 1, et en divisant par x_{k-1}^2 le numérateur et le dénominateur de la fraction, on obtient

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 - \frac{\left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2}{\left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2 + \frac{x_k}{x_{k-1}} + 1},$$

ou encore $y_k = 1 - \frac{y_{k-1}^2}{y_{k-1}^2 + y_{k-1} + 1}$, c'est-à-dire $y_k = h(y_{k-1})$ avec $h(x) = 1 - \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$. On remarque comme précédemment que le dénominateur ne peut pas s'annuler (soit en voyant que le discriminant est négatif, soit en remarquant que $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$, qui ne peut s'annuler que si éventuellement $x = 1$, donc $x^2 + x + 1 \neq 0$ sauf éventuellement pour $x = 1$ où ce n'est pas le cas). Donc la fonction h est bien définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

3. On a $h'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$. Donc h est (strictement) décroissante sur $] -\infty, -2]$, (strictement) croissante sur $[-2, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

On a $\lim_{-\infty} h = \lim_{+\infty} h = 0$, puis $\min_{\mathbb{R}} h = h(-2) = \frac{-1}{3}$, $\max_{\mathbb{R}} h = h(0) = 1$, et la seule solution à $h(x) = 0$ est $x = -1$.

On suppose $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ et $x_0 \neq -x_1$.

— Par la question 2, on a y_1 et y_0 qui sont bien définis et $y_1 = h(y_0) \in [-\frac{1}{3}, 1]$ puisque l'image de h est incluse dans $[-\frac{1}{3}, 1]$. Comme $x_0 \neq -x_1$, alors $y_0 \neq -1$ et donc $h(y_0) \neq 0$. Donc on a bien y_1 bien défini et $y_1 \in [-\frac{1}{3}, 1] \setminus \{0\}$. Démontrons le résultat demandé par récurrence. Si y_k est bien défini et $y_k \in [-\frac{1}{3}, 1] \setminus \{0\}$, on en conclut que $x_{k+1} \neq 0$ (sinon $y_k = 0$) et que donc y_{k+1} est bien défini, et on a $y_{k+1} = h(y_k) \in [-\frac{1}{3}, 1]$. Comme $y_k \neq -1$ (puisque $y_k \geq -\frac{1}{3}$), on en conclut que $h(y_k) \neq 0$. Donc on a bien y_{k+1} qui est bien défini et appartient à $[-\frac{1}{3}, 1] \setminus \{0\}$. Le résultat est donc vrai par récurrence pour tout $k \geq 1$.

— On a donc pour $k \geq 2$, $y_k = h(y_{k-1})$. Mais comme $y_{k-1} \in [-\frac{1}{3}, 1] \setminus \{0\}$, si $y_{k-1} \in [-\frac{1}{3}, 0[$ on obtient que $y_k \in [h(-\frac{1}{3}), h(0)[= [\frac{6}{7}, 1[$ puisque h est strictement croissante sur cet intervalle. Et si $y_{k-1} \in]0, 1]$, alors $y_k \in [h(1), h(0)[= [\frac{2}{3}, 1[$ puisque h est strictement décroissante sur cet intervalle. Donc dans tous les cas $y_k \in [\frac{6}{7}, 1[\cup [\frac{2}{3}, 1[= [\frac{2}{3}, 1[$, puisque $\frac{6}{7} > \frac{2}{3}$.

— Pour tout $k \geq 3$, on a donc $y_{k-1} \in [\frac{2}{3}, 1[$, et comme h est strictement décroissante sur cet intervalle, on obtient que $y_k = h(y_{k-1}) \in]h(1), h(\frac{2}{3})] =]\frac{2}{3}, \frac{15}{19}]$.

— On obtient donc $\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|} = |y_k| \leq \frac{15}{19} < 1$ dès que $k \geq 3$. La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc linéairement vers 0 à un taux inférieur ou égal à $\frac{15}{19}$.

Pour montrer qu'elle ne converge pas superlinéairement, si on prend la définition initiale, on a que $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|} \geq \frac{2}{3} \neq 0$. On peut aussi le montrer avec la définition étendue : on obtient $|x_k-0| \geq (\frac{2}{3})^{k-2} |x_2-0|$, et donc on ne peut pas avoir $|x_k-0| \leq C\alpha^k$ à partir d'un certain rang si $\alpha < \frac{2}{3}$ (puisque $\alpha^k = o((\frac{2}{3})^k)$), donc le taux de convergence linéaire, même avec la définition étendue est supérieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

4. Dans des hypothèses raisonnables, on s'attend à ce que la méthode de la sécante fournisse des itérés qui convergent superlinéairement (plus précisément avec un ordre égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$). Ici ce n'est pas le cas, même lorsque l'on démarre très proche de l'unique minimum. C'est donc qu'on n'est pas dans le cadre des hypothèses « raisonnables ». Ici le problème n'est clairement pas la régularité.

L'hypothèse cruciale qui n'est pas satisfaite est qu'au point de minimum local x_* , il faut qu'on ait $f''(x_*) > 0$. Ici, on a $f''(0) = 0$: le point critique est dégénéré.

5. On a déjà que $h([\frac{2}{3}, 1]) \subset [\frac{2}{3}, 1]$ d'après l'étude. Pour $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, on a

$$|h'(x)| = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)} \leq \frac{1 \cdot 3}{(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9})^2} \leq \frac{3}{4},$$

puisque $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \geq 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$. La fonction h est donc $\frac{3}{4}$ -Lipschitzienne, donc contractante puisque $\frac{3}{4} < 1$. L'intervalle $I = [\frac{2}{3}, 1]$ est fermé, donc complet, et $h(I) \subset I$, donc par le théorème de point fixe, on obtient que h admet un unique point fixe sur cet intervalle, et que partant de n'importe quel point de I (par exemple y_2), la suite définie par application répétée de la fonction h converge vers ce point fixe. On obtient donc que y_k converge vers l'unique point fixe de h . Appelons ce point fixe α , il vérifie donc $\alpha = h(\alpha)$, ce qui est équivalent à $\alpha^3 + \alpha^2 = 1$.

On a donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|} = \alpha$, où α est l'unique racine dans $[\frac{2}{3}, 1]$ du polynôme $\alpha^3 + \alpha^2 - 1$. Le taux de convergence est donc égal à cette racine (on peut en fait montrer que c'est la seule racine réelle, elle vaut approximativement 0,755).

2 Convergence de la méthode de descente de gradient à pas fixe en dimension un

1. On va démontrer la contraposée : si quelque soit $\delta > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq k_0$ tel que $x_k \in [c - \delta, c + \delta]$, alors c est une valeur d'adhérence.

Supposons donc que quelque soit $\delta > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq k_0$ tel que $x_k \in [c - \delta, c + \delta]$.

On va créer une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers c .

On pose $\varphi(0)$ de manière arbitraire (par exemple $\varphi(0) = 0$), et si $\varphi(n)$ est construit, on sait que pour $k_0 = \varphi(n) + 1$ et $\delta = \frac{1}{n+1}$, il existe $k \geq k_0$ tel que $x_k \in [c - \delta, c + \delta]$. On note $\varphi(n+1) = k$.

On a donc $\varphi(n+1) \geq k_0 = \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$ et $x_{\varphi(n+1)} \in [c - \frac{1}{n+1}, c + \frac{1}{n+1}]$.

On a donc créé une fonction φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} avec $|x_{\varphi(n+1)} - c| \leq \frac{1}{n+1}$, donc la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c et donc c est une valeur d'adhérence de la suite.

2. Par l'absurde, si $c \in]a, b[$ n'est pas valeur d'adhérence, alors il existe un δ et un k_0 tels que pour tout $k \geq k_0$ $x_k \notin [c - \delta, c + \delta]$. De plus comme $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$, quitte à prendre k_0 plus grand, on peut supposer que $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta$ pour tout $k \geq k_0$.

Montrons alors tous les x_k pour $k \geq k_0$ sont « du même côté » de c . Supposons par exemple que $x_k > c + \delta$, avec $k \geq k_0$ alors on obtient que $x_{k+1} \geq x_k - \delta$ puisque $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta$. Et donc $x_{k+1} > c + \delta - \delta = c$. Donc puisque $k+1 \geq k_0$, on obtient que $x_{k+1} \notin [c - \delta, c + \delta]$, et que donc $x_{k+1} > c + \delta$. Exactement de la même manière, on montre que si $x_k < c - \delta$ avec $k \geq k_0$, alors $x_{k+1} < c - \delta$. Donc par récurrence, si $x_{k_0} > c + \delta$ alors pour tout $k \geq k_0$ on a $x_k > c + \delta$, ce qui implique que a n'est pas une valeur d'adhérence (toutes les limites de suites extraites sont alors supérieures à $c + \delta > a$), et si $x_{k_0} < c - \delta$, alors on a $x_k < c - \delta$ pour tout $k \geq k_0$, et toutes les suites extraites ont une limite inférieure à $c - \delta < b$, donc b n'est pas une valeur d'adhérence. On a donc bien une contradiction dans tous les cas.

3. Il faut vérifier que toutes les hypothèses du théorème 1 du cours sont satisfaites. C'est le cas puisque $S_0 = f^{-1}(]-\infty, f(x_0)])$ est bien fermé dans \mathbb{R} car f est continue (cette hypothèse du théorème est toujours satisfaite quand $\Omega = \mathbb{R}^n$, et c'est le cas ici).

La conclusion du théorème est donc que $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante ayant une limite, mais surtout que $|f'(x_k)| \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme $|x_{k+1} - x_k| = \alpha |f'(x_k)|$, on a bien $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

4. D'après la question 2, on a que pour tout $c \in [a, b]$, c est une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers c .

Par continuité de f' (elle est L -Lipschitzienne donc continue), on a $f'(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f'(c)$ qui vaut donc 0 puisque $f'(x_k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. On obtient donc que $f'(c) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$, donc f est constante sur $[a, b]$.

En prenant $c \in]a, b[$, comme $x_{\varphi(n)} \rightarrow c$, il existe donc un n_0 pour lequel $x_{\varphi(n_0)} \in [a, b]$. On a donc $f'(x_{\varphi(n_0)}) = 0$, et donc la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $\varphi(n_0)$. En particulier, elle converge vers la valeur de cette constante, et donc ne peut pas avoir deux valeurs d'adhérences distinctes.

5. Comme à la question 2, si c n'est pas valeur d'adhérence, alors au bout d'un certain rang tous les x_k sont supérieurs à c , ou tous sont inférieurs à c .

Donc si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence x_* elle est unique. On se fixe alors $\varepsilon > 0$, et donc en prenant $c = x_* + \varepsilon$ on obtient qu'au bout d'un certain rang tous les x_k sont inférieurs à $x_* + \varepsilon$ (s'ils étaient tous supérieurs x_* ne serait pas valeur d'adhérence). De même en prenant $c = x_* - \varepsilon$ on obtient qu'au bout d'un certain rang tous les x_k sont supérieurs à $x_* - \varepsilon$. Donc il existe un rang à partir duquel tous les x_k sont dans $[x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$, donc la suite converge vers x_* , et par continuité de f' , à la limite on obtient que $f'(x_*) = 0$.

Sinon, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune valeur d'adhérence. Donc pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a au bout d'un certain rang, soit tous les x_k supérieurs à c , soit tous inférieurs à c . On ne peut pas avoir c_1 et c_2 tels qu'à partir d'un certain rang on ait $x_k \geq c_1$ et $x_k \leq c_2$, sinon la suite serait bornée et admettrait au moins une valeur d'adhérence. Donc on a soit pour tout $c \in \mathbb{R}$ les x_k sont supérieurs à c à partir d'un certain rang (ce qui veut dire que $x_k \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$), soit pour tout $c \in \mathbb{R}$ les x_k sont inférieurs à c à partir d'un certain rang (ce qui veut dire que $x_k \rightarrow -\infty$).

6. Si $f'(x) \neq 0$ quel que soit x , on ne peut pas avoir le cas $x_k \rightarrow x_* \in \mathbb{R}$, sinon on aurait $f'(x_*) = 0$. Par exemple en prenant $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$, on a $S_0 =]-\infty, 0]$, sur lequel $f' = e^x$ est 1-Lipschitz (puisque $f''(x) = e^x \in [0, 1]$). Donc $x_k \rightarrow -\infty$ dans ce cas. En prenant $f(x) = e^{-x}$ on obtient $x_k \rightarrow +\infty$.

7. * Le raisonnement des questions précédentes ne s'applique pas parce qu'il n'y a pas d'ordre sur \mathbb{R}^n qui soit compatible avec les limites. On ne peut pas dire que si $c \in \mathbb{R}^2$ n'est pas valeur d'adhérence, alors au bout d'un certain rang tous les x_k sont « supérieurs » ou « inférieurs » à c . On ne peut pas non plus dire que si a et b sont valeurs d'adhérence, alors le segment $[a, b]$ est composé de valeurs d'adhérences : il se peut qu'une suite dans ce cas ait plusieurs valeurs d'adhérence ayant une structure différente (par exemple une suite qui tourne autour d'un cercle). Une des choses qu'on peut montrer dans ce cas, si la suite est bornée et vérifie $|x_{k+1} - x_k|$ est que l'ensemble des valeurs d'adhérences est connexe, mais ça demande un peu de travail.

Il existe des exemples où une suite correspondant à la méthode de descente de gradient dans le cadre du théorème 1 a le comportement suivant : l'ensemble des valeurs d'adhérences correspond à un cercle en entier, c'est ce qu'on a obtenu dans le troisième exercice de la préparation au partiel. Donc on est certain que l'on ne pourra pas prouver de résultat similaire à celui de la question 5 en dimension supérieure ou égale à deux.

3 Précision de la méthode de la section dorée

1. Si x et y sont des réels de $[a, b]$ avec $x_* \leq x \leq y$, l'estimation de second ordre s'écrit

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) + \frac{h}{2}|y - x|^2.$$

Étant donné que $x \geq x_*$ la fonction f étant croissante sur $[x_*, b]$, on obtient que $f'(x) \geq 0$, et comme $y - x \geq 0$ on obtient au final $f(y) - f(x) \geq \frac{h}{2}|y - x|^2$. On écrit alors

$$\hat{f}(y) - \hat{f}(x) \geq f(y) - f(x) - |f(y) - f(x) - (\hat{f}(y) - \hat{f}(x))| \geq \frac{h}{2}|y - x|^2 - 2\eta\|f\|_\infty.$$

2. Dans le cas $x_* < x$, on obtient que si $|y - x|^2 > \frac{2\eta\|f\|_\infty}{\frac{h}{2}} = 4\frac{\|f\|_\infty}{h}\eta$, alors $\hat{f}(y) - \hat{f}(x) > 0$. On obtient donc bien le résultat voulu avec $C_0 = 2\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{h}}$. Pour le cas $y < x_*$, c'est exactement le même calcul, on trouve aussi que si $|y - x| > C_0$ alors $\hat{f}(x) > \hat{f}(y)$.

3. On a

$$d_n - c_n = [\alpha - (1 - \alpha)](b_n - a_n) = (\alpha - \alpha^2)(b_n - a_n) = \alpha(1 - \alpha)(b_n - a_n) = \alpha^3(b_n - a_n).$$

On sait que $b_n - a_n = \alpha^n(b_0 - a_0) = \alpha^n(b - a)$. On pose donc n_0 le plus petit n tel que $\alpha^n(b - a) \leq \frac{C_0}{\alpha^3}\sqrt{\eta}$. On a donc que $b_n - a_n > \frac{C_0}{\alpha^3}\sqrt{\eta}$ si et seulement si $n < n_0$. Il faut donc montrer que pour tout $n < n_0$ on a $x_* \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, ou encore que pour tout $n \leq n_0$ on a $x_* \in [a_n, b_n]$ (on l'a déjà pour le cas $n = 0$). Montrons que c'est vrai par récurrence.

On suppose que $x_* \in [a_n, b_n]$ pour $n < n_0$, montrons que $x_* \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Les nouveaux termes de la suite sont choisis de la manière suivante :

(a) Si $\hat{f}(c_n) < f(\hat{d}_n)$, alors $(a_{n+1}, d_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n, d_n)$.

(b) Si $\hat{f}(c_n) \geq f(\hat{d}_n)$, alors $(a_{n+1}, c_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, d_n, b_n)$.

En fait on verra que le choix qu'on fait dans le cas $\hat{f}(c_n) = \hat{f}(d_n)$ n'est pas important, on aurait pu prendre le choix (a) à la place du choix (b) dans ce cas.

Puisque $n < n_0$ on a $b_n - a_n > \frac{C_0}{\alpha^3}\sqrt{\eta}$, on obtient donc que $d_n - c_n > C_0\sqrt{\eta}$. D'après la question précédente appliquée pour $x = c_n$ et $y = d_n$, on a les possibilités suivantes.

— Soit $x_* \in [c_n, d_n]$ et dans les deux cas on a bien $x_* \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

— Sinon, si $d_n < x_*$, alors $\hat{f}(c_n) > \hat{f}(d_n)$, on est dans le cas (b), et donc $x_* \in]d_n, b_n] \subset [c_n, b_n] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

— Sinon, on a $x_* < c_n$, et alors $\hat{f}(c_n) < \hat{f}(d_n)$, on est dans le cas (a), et donc $x_* \in [a_n, c_n[\subset [a_n, d_n] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Dans tous les cas on a bien $x_* \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Donc on a bien que pour tout $n < n_0$ (c'est-à-dire tant que $b_n - a_n > \frac{C_0}{\alpha^3}\sqrt{\eta}$) on a $x_* \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Donc en particulier $x_* \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$.

Les suites (a_n) et (b_n) de la méthode de la section dorée sont toujours des suites adjacentes, donc elles convergent vers un réel \hat{x}_* , et par encadrement, les suites (c_n) et (d_n) convergent aussi vers \hat{x}_* . Comme les suites sont adjacentes, on a $a_n \leq \hat{x}_* \leq b_n$ pour tout n .

Donc pour $n = n_0$, d'après ce qui précède, on a $x_* \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ et $\hat{x}_* \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Ces deux points sont dans le même intervalle, leur distance est donc plus petite que la longueur de l'intervalle. On obtient donc

$$|\hat{x}_* - x_*| \leq b_{n_0} - a_{n_0} = \alpha^{n_0}(b - a) \leq \frac{C_0}{\alpha^3}\sqrt{\eta},$$

ce que l'on voulait démontrer.

4. Le critère d'arrêt que l'on peut donner est de s'arrêter dès que $b_n - a_n$ est de l'ordre de $\sqrt{\eta}$, par exemple dès que $b_n - a_n \leq \sqrt{\eta}$ (on ne connaît pas forcément les constantes C_0 et C_1), et de renvoyer par exemple le milieu m du segment $[b_n, a_n]$ donné par $m = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Dans ce cas-là, on a toujours $\hat{x}_* \in [b_n, a_n]$, donc la distance entre \hat{x}_* et le milieu m de $[a_n, b_n]$ est plus petite que la moitié de la longueur de cet intervalle : $|\hat{x}_* - m| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\eta}$.

On obtient donc un point m vérifiant

$$|m - x_*| \leq |m - \hat{x}_*| + |\hat{x}_* - x_*| \leq \left(\frac{1}{2} + C_1\right)\sqrt{\eta},$$

c'est à dire qui approxime x_* avec une précision de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\eta}$.

Le plus petit n qui vérifie $b_n - a_n \leq \sqrt{\eta}$ est le plus petit n tel que $\alpha^n(b - a) \leq \sqrt{\eta}$, soit encore $n \ln \alpha + \ln(b - a) \leq \ln(\sqrt{\eta})$ (puisque \ln est croissante). C'est donc le plus petit n tel que $n \geq \frac{\frac{1}{2} \ln \eta - \ln(b - a)}{\ln \alpha}$ (on a changé le signe car $\alpha < 1$ donc $\ln \alpha < 0$).

Le nombre d'itérations de la méthode est donc la partie entière de $\frac{\frac{1}{2} \ln \eta - \ln(b - a)}{\ln \alpha}$. Et comme il y a une évaluation de fonction par itération (avec éventuellement quelques évaluations pour initialiser), le nombre total d'évaluation de fonctions est environ $\frac{\frac{1}{2} \ln \eta - \ln(b - a)}{\ln \alpha}$.

5. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient

$$f(\hat{x}_*) = f(x_*) + f'(x_*)(\hat{x}_* - x_*) + \frac{1}{2}(\hat{x}_* - x_*)^2 f''(t),$$

Pour t un réel entre x_* et \hat{x}_* . Comme $f'(x_*) = 0$, on obtient grâce à l'hypothèse sur f'' que $f(\hat{x}_*) \in [f(x_*), f(x_*) + \frac{H}{2}(\hat{x}_* - x_*)^2]$. On a donc

$$|\hat{f}(\hat{x}_*) - f(x_*)| \leq |\hat{f}(\hat{x}_*) - f(\hat{x}_*)| + |f(\hat{x}_*) - f(x_*)| \leq \eta \|f\|_\infty + \frac{H}{2}(\hat{x}_* - x_*)^2 \leq \eta(\|f\|_\infty + C_1^2 \frac{H}{2}),$$

c'est-à-dire qu'on a accès à une approximation de $f(x_*)$ avec une précision de l'ordre de grandeur de η , et on sait qu'on ne peut pas espérer mieux, puisque même si on connaissait exactement x_* , l'approximation de $f(x_*)$ donnée par $\hat{f}(x_*)$ a aussi une précision de l'ordre de grandeur de η .

6. En posant $t = x + \frac{\pi}{2}$, on obtient $t \in [-\delta, \delta]$, et

$$\sin x = \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t \leq -1 + \frac{t^2}{2} \leq -1 + \frac{\delta^2}{2},$$

ce qui donne le résultat (et même un peu mieux) étant donné que $\sin x \geq -1$ dans tous les cas.

Donc si $\delta = 2^{-27}$ (et même en fait si $\delta = \sqrt{2} \cdot 2^{-27} \approx 1,05 \cdot 10^{-8}$), on obtient que $\sin x \in [-1, -1 + 2^{-54}]$. Le réel $\sin x$ est donc codé par le nombre à virgule flottante -1 . Et donc la machine renverra -1 si on lui donne l'instruction $\sin(x)$.

Lorsque la méthode de la section dorée évalue la fonction \sin aux points c_n et d_n , si c_n et d_n sont dans $[-\frac{\pi}{2} - \delta, -\frac{\pi}{2} + \delta]$ avec δ de l'ordre de 10^{-8} , elle renvoie -1 en c_n et en d_n , donc elle ne peut plus distinguer si $\sin(c_n) > \sin(d_n)$ ou le contraire, et on n'est donc pas sûr que ce soit le bon triplet admissible qui soit choisi. L'erreur est donc de l'ordre de 10^{-8} , ce que l'on voit bien sur le graphique, dès que la tolérance est plus petite que 10^{-8} .

On voit également que l'ordre de convergence effectif est α , puisque les pentes des erreurs et de la droite correspondant aux points (n, α^n) en échelle logarithmique sont les mêmes, du moins tant que la précision optimale (de l'ordre de 10^{-8}) n'est pas encore atteinte.

7. * Dans ce cas c'est encore pire. Il suffirait par exemple que δ soit de l'ordre de 10^{-4} pour que la machine renvoie toujours 1 lorsqu'on lui demande d'appliquer la fonction f (pour les nombres à virgule flottante). En fait dans ce cas particulier de la fonction $f : x \mapsto 1 + x^4$, si on peut approximer f avec une précision de l'ordre de grandeur de η , on peut montrer que la méthode de la section dorée fournirait une approximation \hat{x}_* avec une précision de l'ordre de grandeur de $\eta^{\frac{1}{4}}$.