TD et TP 1 : Optimisation en dimension un — Nom(s) :

On commence toujours par charger les librairies. Les questions avec une étoile sont facultatives (et difficiles). Les parties 1, 2, 3 sont indépendantes.

```
In [1]: %pylab inline
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

1. Ordre de convergence des suites

(a-TD) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n\Big(1 - \frac{x_n}{2}\Big) + 1.$$

Montrer que la suite (x_n) converge linéairement. Indication : montrer d'abord que $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire sur le taux de convergence linéaire ?

(b-TD) On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge à l'ordre (au moins) 2. Indication : montrer d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$.

(c*-TD) On pose $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}.$$

Montrer que la suite (x_n) converge et que son ordre de convergence est au moins égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Indication : en posant $y_n = x_{n+1} - x_n$, montrer que pour $n \geqslant 1$ on a $(x_{n+1} + x_n)y_{n+1} = -y_n(y_n + y_{n-1})$. Puis que $|y_{n+1}| \leqslant |y_n||y_{n-1}|$.

(d-TP) Calculer numériquement les N premiers termes des trois suites des questions (a),(b) et (c) (on pourra commencer avec $N = 10$). Produire un graphique qui permette d'illustrer leur ordre de convergence (on pourra utiliser une échelle semi-logarithmique avec la fonction `semilogy`). Observer si un changement de la condition initiale de la suite influence le comportement de la suite.

```
In [ ]:
```

2. Dichotomie et dérivée approchée.

(a-TP) Écrire une fonction prenant en argument une fonction f et un point x et qui renvoie une approximation de la dérivée de cette fonction au point x par la formule des différences finies avec un paramètre ε. L'appliquer à une fonction dont vous connaissez la dérivée (non nulle), et afficher le comportement de l'erreur entre la valeur approchée et la valeur exacte en fonction de ε (pour une large plage d'ordre de grandeur de ε, par exemple au moins entre 10^{-1} et 10^{-15}). On pourra cette fois-ci prendre aussi une échelle logarithmique pour ε (en utilisant les fonctions `semilogx` ou `loglog`). Comment expliquer ce comportement ? Quel paraît être un bon choix de ε ? Quel est alors l'ordre de grandeur de l'erreur numérique ?

```
In [ ]:
```

(b-TP) Même question avec la formule des différences finies centrées.

(c-TP) Appliquer les fonctions codées précédemment à la fonction `sinapprox` suivante, qui calcule le sinus en simulant des erreurs d'arrondis plus grosses que celles de la machine. Que devient le bon choix de ε cette fois-ci ? Comment semble se comporter ce bon choix en fonction de la taille des erreurs d'arrondi ?

```
In [ ]: tailleErreur=1e-6
        def sinapprox(x):
            return (2*random_sample()-1)*tailleErreur + sin(x)
```

(d-TD) On suppose que l'on se place sur un intervalle $[a, b]$ où f est de classe C^2, et où f et f'' sont du même ordre de grandeur : $\|f''\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$, où C est une constante « du même ordre de grandeur que 1 ». On se donne une approximation $\hat{f}$ de f qui a une précision relative η : $|\hat{f}(x) - f(x)| \leqslant \eta\|f\|_\infty$.

Montrer que l'on a pour tout $x \in [a, b-\varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x)}{\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{2\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon}{2}\right]\|f\|_\infty.$$

Comment se comporte le ε qui minimise le terme de droite de cette inégalité par rapport à η ? Quelle est alors l'ordre de grandeur de l'erreur finale entre la dérivée au point x et l'approximation par différence finie en utilisant $\hat{f}$.

(e-TD) Mêmes questions avec la différence finie centrée. On suppose cette fois-ci que f est de classe C^3 et que $f^{(3)}$ est du même ordre de grandeur que f : $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Démontrer que pour tout $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$:

$$\left|\frac{\hat{f}(x+\varepsilon) - \hat{f}(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} - f'(x)\right| \leqslant \left[\frac{\eta}{\varepsilon} + \frac{C\varepsilon^2}{6}\right]\|f\|_\infty.$$

Quel est cette fois le bon choix de ε par rapport à η ? Comment se comporte l'erreur finale en fonction de η ?

Vérifier que ces résultats théoriques sont cohérents avec les observations obtenues aux questions (a), (b), et (c).

(f-TP) Programmer une fonction qui prend pour argument une fonction f, deux réels correspondant aux extrémités d'un segment sur lequel f est strictement décroissante puis croissante (on l'appliquera à des fonctions C^1 sur ce segment), un pas ε et une tolérance, et qui calcule par dichotomie une approximation du minimum (en calculant des approximations de $f'(x)$ par différence finie et en résolvant $f'(x) = 0$).

(g-TP) Définir une fonction f à optimiser (par exemple $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$) en y incorporant une variable globale jouant le rôle de compteur du nombre de fois où cette fonction est évaluée. Tester la fonction programmée au (f) sur la fonction f. Illustrer par un graphique le taux de convergence effectif (qui illustre la décroissance de l'erreur en fonction du nombre d'évaluations de la fonction).

```
In [ ]:
```

3. Méthodes de réduction de triplets

(a-TP) Programmer une fonction qui prend pour argument une fonction f, deux points initiaux correspondant aux extrémités d'un segment sur lequel f est unimodale, et une tolérance ε. La fonction doit renvoyer une approximation du minimum par la méthode de la section dorée.

(b-TP) Tester la fonction programmée au (a) en l'appliquant à la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur $[1, 2]$ (ou à une autre fonction de votre choix). Incorporer une variable globale jouant le rôle d'un compteur dans la définition de f pour pouvoir illustrer par un graphique le taux de convergence effectif (et vérifier qu'il est égal à $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, et meilleur que le taux obtenu au (g) de la partie 2).

(c*-TP) Programmer de même une fonction qui prend les mêmes arguments que dans la question (a), et qui renvoie cette fois-ci une approximation par la méthode de réduction du triplet par interpolation quadratique. Tester cette fonction et illustrer par un graphique l'ordre de convergence effectif obtenu.

```
In []:
```

4. Application : résolution d'un problème de plus court chemin entre deux zones parcourues à deux vitesses différentes.

On cherche à modéliser un problème de plus court chemin entre deux zones de $\mathbb{R}^2$ parcourues à deux vitesses v_1 et v_2. On se donne par exemple une fonction f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on définit $Z_1 = \{(x,y), y \geqslant f(x)\}$ et $Z_2 = \{(x,y), y \leqslant f(x)\}$ les deux zones : au-dessus et en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. On se donne un point A dans Z_1, un point B dans Z_2, et un point M sur la courbe $\mathcal{C}$. On cherche à minimiser le temps de parcours de A à B, sachant qu'on se déplace en ligne droite sur chacune des zones aux vitesses v_1 et v_2 avec $v_1 > v_2$.

(a-TD) Faire un dessin. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{M \in \mathcal{C}} \frac{\|AM\|}{v_1} + \frac{\|BM\|}{v_2}.$$

Montrer qu'il peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonction réelle d'une variable, et qu'il admet une solution atteinte pour un certain point $M_* \in \mathcal{C}$. Montrer que le segment $[AM_*]$ est inclus dans Z_1, et que donc on obtient une solution à notre problème initial.

(b-TP) Utiliser les méthodes programmées dans les parties précédentes pour résoudre le problème, pour une fonction f de votre choix, et des points A et B (on pourra les prendre au hasard). Afficher un joli dessin représentant les zones et le chemin optimal.

(c*-TD) Montrer que la solution vérifie les lois de Descartes de la réfraction : si on note θ_i (resp. θ_r) l'angle entre la normale à la courbe et la droite (AM) (resp. (BM)), appelé angle d'incidence (resp. de réfraction), et $n_1 = \frac{1}{v_1}$, $n_2 = \frac{1}{v_2}$ les indices de réfraction, on a :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

La lumière prend donc le plus court chemin ! Montrer par un dessin que si on ne suppose pas $v_1 < v_2$, alors il peut ne pas y avoir unicité à la solution.

(d*-TD/TP) On s'intéresse au problème de minimiser le chemin entre A et un autre point A' de Z_1. Faire la même chose qu'aux questions (a) et (b) pour ce problème, et montrer que cette fois ci la solution vérifie les lois de Descartes de la réflexion : $\theta_i = \theta_r$. Montrer que la solution est unique si f est convexe : on ne voit rien en double dans un miroir convexe !