Calcul Différentiel et Optimisation (L3 - 2023/2024)
Plan de cours et planning prévisionnel.

Amic Frouvelle

22 décembre 2023

Le plan du cours est le suivant. Les séances de cours sont détaillées ensuite, chaque notion étant précédée du numéro de section correspondant.

1 Différentiabilité

1.1 Définition

1.2 Cas $E = \mathbb{R}$: courbes paramétrées

1.3 Propriétés générales des applications différentiables

1.4 Le cas $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$

1.5 Inégalité des accroissements finis

1.6 Caractère C^1

2 Autour du théorème d'inversion locale

2.1 Rappels : complétude, point fixe

2.2 Homéomorphismes, difféomorphismes

2.3 Le théorème d'inversion locale

2.4 Le théorème des fonctions implicites

3 Optimisation

3.1 Différentielles d'ordre supérieur

3.2 Optimisation libre

3.3 Optimisation sous contraintes

Séance 1, 6/09

- 1.1 Rappels sur les applications linéaires continues.
- 1.1 Définition de la différentiabilité de $f : U \subset E \to F$, où U est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé.
- 1.1 Trois notations principales acceptées (pour $x \in U, h \in E$) : $df_x(h)$, $Df(x)(h)$, $f'(x) \cdot h$. Point sur les conflits/abus de notations, qu'il faut savoir repérer et parfois utiliser à bon escient !
- 1.2 Cas où $E = \mathbb{R}$: courbes paramétrées.
- 1.2 Point régulier, tangente à une courbe paramétrée, méthode pour tracer une courbe $I \to \mathbb{R}^2$.

Séance 2, 13/09

- 1.2 Retour sur les courbes paramétrées.
- 1.2 Quelques exemples pour les points singuliers : rebroussement, reparamétrage, demi-tangentes.
- 1.3 Exemples de fonctions différentiables $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
- 1.3 Opérations sur les fonctions différentiables : somme, produits.

Séance 3, 20/09

- 1.3 Différentiabilité de la composée.
- 1.3 Différentiabilité de $f = (f_1, \ldots, f_p) \Leftrightarrow$ différentiabilité de chacune des f_i.
- 1.3 Retour sur la différentielle du produit (via la différentiabilité d'une application bilinéaire continue, et la composition).
- 1.4 Calculs pratiques de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: gradient, dérivées partielles.

Séance 4, 27/09

- 1.4 Calculs de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$: jacobienne.
- 1.4 Composée de fonctions en dimension finie : règle de la chaîne.
- 1.4 Exemples d'applications de la règle de la chaîne (gradient en coordonnées polaires).
- 1.5 Inégalité des accroissements finis (de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Séance 5, 4/10

- 1.5 Rappels sur la norme subordonnée (norme opérateur).
- 1.5 Inégalité des accroissements finis (cadre général). Cas connexe par arcs.
- 1.5 Application : différentielle nulle $\Rightarrow$ localement constante.
- 1.6 Application importante (pour $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$) : existence de dérivées partielles continues $\Rightarrow$ différentiabilité.
- 1.6 Caractère C^1.

Séance 6, 11/10

- 1.6 Différentielles partielles (si $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$) continues $\Rightarrow C^1$.
- 2.1 Rappels sur la complétude.
- 2.1 Applications contractantes, théorème de point fixe.
- 2.1 Théorème de point fixe, version à paramètre : régularité d'une fonction définie implicitement.
- 2.2 Homéomorphismes, définition.
- 2.2 Propriétés des homéomorphismes, transfert des propriétés topologiques.

Séance 7, 18/10

- 2.2 Exemples importants d'homéomorphismes et d'espaces non homéomorphes, retour sur la connexité.
- 2.2 Les homéomorphismes ne transportent pas forcément les notions métriques (complétude, bornes, boules, etc.).
- 2.2 Difféomorphismes, exemples.
- 2.2 Propriétés des différentielles des difféomorphismes.
- 2.3 Théorème d'inversion locale (énoncé).

Ici s'arrête le programme pour le partiel.

Séance 8, 9/11

- 2.3 Théorème d'inversion locale (démonstration).

Séance 9, 16/11

- 2.3 Applications du Théorème d'inversion locale : application ouverte, théorème d'inversion globale.
- 2.3 Exemples d'utilisations : changement de variables, racine carrée ou logarithmes de matrices.
- 2.4 Théorème des fonctions implicites : exemple en dimension 2. Énoncé de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- 2.4 Motivation de la généralisation à des dimensions supérieures. Exemple d'ensemble de niveau d'une fonction de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (on peut espérer exprimer une variable en fonction des deux autres). Intersection de deux tels ensembles formant une courbe dans l'espace : on peut espérer exprimer deux variables en fonction de la troisième.

Séance 10, 23/11

- 2.4 Différentielles partielles. Énoncé du TFI dans le cadre général + démonstration.
- 2.4 Exemples d'applications.

Séance 11, 30/11

- 2.4 Variante de l'énoncé du TFI, autres applications
- 2.4 Calculs de développements limités de fonctions implicites.
- 3.1 Différentielle seconde. Théorème de Schwarz.

Séance 12, 7/12

- 3.1 Matrice Hessienne pour une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- 3.1 Différentielles d'ordre supérieur.
- 3.1 Théorème de Taylor (avec reste intégral).
- 3.1 Expression des différents termes du développement de Taylor en fonction des dérivées partielles pour une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- 3.2 Optimisation libre : point critique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- 3.2 Extremum local, global, strict.
- 3.2 Existence de minimum local pour une fonction coercive.
- 3.2 Conditions du second ordre pour un point critique.
- 3.3 Exemple de problème d'optimisation sous contraintes.
- 3.3 Théorème des extrema liés (énoncé).
- 3.3 Exemple de résolution de problème d'optimisation à la fois libre et lié, par exemple sous une contrainte d'inégalité (en séparant le problème en deux).

Séance 13, 14/12

- 3.3 Démonstration du théorème des extrema liés lorsque la contrainte peut être exprimée par le TFI.
- 3.3 Exemple de résolution de problème d'optimisation lié avec deux contraintes d'égalité.
- 3.4 Sous-variété, espace tangent.
- 3.4 Point critique d'une fonction sur une sous-variété.