Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n° 8 (hors programme de l'examen) — Sous-variétés.

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. *Questions proches du cours*

1. Les différentielles des fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x, y, 0)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (y, z)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 3xz$
2. Soient E, F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \mapsto F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\{(x, f(x)) \in U \times F, x \in U\}$ est une sous-variété de $E \times F$.

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-variétés ? *Attention, on demande une preuve rigoureuse !*

1. $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^2\}$,
2. $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^3 = x^2\}$,
3. $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = z^2\}$,
4. $\mathcal{V} = \left\{\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right), t > -1\right\}$,
5. $\mathcal{V} = \{(\cos(t), \cos(t)), t \in \mathbb{R}\}$.
6. $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x - 2(x^2 + y^2)\}$.
7. $\mathcal{V} = \{(t, t^2);\ t \in \mathbb{R}\}$.
8. $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$.

Même question en regardant les ensembles $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Conseil amical ♡ : on se forcera à dessiner autant que possible ces (non-)sous-variétés.

Exercice 3. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on calculera la dimension et dont on donnera l'espace tangent.

— le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.
— les matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
— les matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Montrer que

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\right\},$$

est une sous variété de $\mathbb{R}^4$, homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{V}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 + t = 0 \\ x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un voisinage U du point $(x, y, z, t) = (1, -1, 0, 0)$ tel que $U \cap \mathcal{V}$ soit une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6. On considère l'ensemble $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \neq 0, M^2 = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \neq 0, (\det(M), \mathrm{tr}(M)) = (0,0)\}$.
2. En déduire que $\mathcal{N}$ est une sous-variété différentiable dont on donnera la dimension.
3. Quel est l'espace tangent en un point de $\mathcal{N}$?

Exercice 7. Montrer que l'ensemble D_u des polynômes unitaires de degré 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent en tout point.

Exercice 8. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3,$$

puis l'ensemble S d'équation $f(x,y,z) = 0$.

1. Est-ce une surface lisse (sous-variété de dimension 2) de $\mathbb{R}^3$? Et $S \setminus \{0\}$?
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(1,1,1)$.
3. (a) Montrer qu'au voisinage du point $(1,1,1)$, la surface S est décrite par une équation de la forme $z = \Phi(x,y)$ où Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de $(1,1)$.
   (b) Ecrire le développement limité de Φ à l'ordre 2 au point $(1,1)$.
   (c) Donner la matrice Hessienne de Φ au point $(1,1)$.

Exercice 9. On suppose $R > r > 0$. Représenter la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par $\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$, et montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2_{2,\mathbb{R}^n} - \|y\|^2_{2,\mathbb{R}^p} = 1$.

1. Montrer que c'est une variété difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.
2. Représenter les différents cas quand $n + p = 3$.

Exercice 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^4$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(\alpha t), \sin(\alpha t)).$$

1. Montrer que φ est une immersion (*i.e.* sa différentielle est injective) injective.
2. Montrer que $\varphi(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.
3. En déduire que l'image de φ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12. Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que

$$M_1 \times M_2 = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n+m};\ a_1 \in M_1,\ a_2 \in M_2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension.

Exercice 13. Soient M et N deux sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^n$, de dimensions respectives m et n.

1. On suppose que pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$.
   (a) Montrer que $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ et préciser sa dimension.
   (b) Donner son espace tangent en $x \in M \cap N$.
   (c) On dit alors que M et N sont transverses. Justifier cela avec un dessin.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors nécessairement $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^d$?

Exercice 14. Soient Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$ et S l'ellipsoïde d'équation $Q = 1$. Soit a un point tel que $Q(a) > 1$.

1. Justifier que a est à l'extérieur de S.
2. Le contour apparent de S vu de a est l'ensemble C des points x de S où l'espace affine tangent $x + T_xS$ contient a.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Montrer que C est une ellipse (intersection de S et d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$).