Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 7 — Optimisation.

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 f(\theta)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f.
2. En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.
3. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) := f(\|x\|^2)$, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Calculer la Hessienne de g.

Exercice 3. Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions définies par

$$e(x,y) = \left(\frac{1}{(1+\sin(x+y))^2}, \frac{\exp(x-y)-1}{1+\ln(1+xy)} \right), \quad f(x,y) = \ln(1+2x+3y), \quad g(x,y) = x^2\exp(y) - y\exp(x).$$

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe α et β positifs tels que $\|f(t)\| \le \alpha$ et $\|f''(t)\| \le \beta$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $r > 0$, $\|f'(t)\| \le \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta r}{2}$, puis que $\|f'(t)\| \le \sqrt{2\alpha\beta}$.

Exercice 5. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $A \mapsto \left(\mathrm{Tr}\left(AA^\top\right)\right)^2$ au voisinage de l'identité.

Exercice 6. Trouver les applications f appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2} = 0.$$

Indication : utiliser le changement de variables : $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, les coordonnées polaires ... ou les deux !

Exercice 7. Pour chacune des fonctions f suivantes, rechercher les extrema sur $\mathbb{R}^2$ et esquisser les courbes de niveau de la surface d'équation $z = f(x,y)$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^4, \quad f(x,y) = x^2 + y^3, \quad f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}.$$

Exercice 8. Déterminer si le problème suivant possède des solutions :

$$\inf \left\{ (x^2 - y^2)^2 - x^2 - y : 0 \le y \le |x|/2 \right\}.$$

Exercice 9. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x,y) = xy, \qquad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Déterminer

1. les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la contrainte $g(x,y) = \frac{2}{3}$,
2. les extrema de g sur son domaine de définition, puis sous la contrainte $f(x,y) = 9$.

Exercice 10. Dans les cas suivants, en traçant les courbes de niveau de f et la contrainte $g(x,y)=0$, trouver graphiquement les points où f atteint un extremum local sous la contrainte $g(x,y)=0$:

$$f(x,y)=x+y, \qquad g(x,y)=x^2+y^2-1,$$
$$f(x,y)=xy, \quad g(x,y)=x^2+y^2-x-y,$$
$$f(x,y)=\ln(x+y), \quad g(x,y)=x^2+y^2-2.$$

Justifier ensuite analytiquement et préciser la nature des extrema locaux.

Exercice 11. Maximiser la fonction xyz sur la courbe obtenue par intersection de la sphère $\mathbb{S}^2 : x^2+y^2+z^2=1$ et du plan $x+y+z=1$.

Exercice 12. Minimiser sur $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$f(x_1,\dots,x_n)=\exp\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

sous les contraintes $\forall i\in[1,n], x_i^2\leq 1$.

Exercice 13. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 qui minimisent la norme euclidienne ?

Exercice 14. Le théorème spectral. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une valeur propre réelle de A, sans passer par les nombres complexes (et le théorème de d'Alembert-Gauss). Ceci conduit ensuite au théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques, et est d'ailleurs la raison pour laquelle les valeurs propres et les multiplicateurs de Lagrange sont souvent désignés par la lettre grecque λ.

1. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $x\mapsto\langle x,Ax\rangle$ admet un ou plusieurs maxima globaux sous la contrainte $\|x\|^2=1$.
2. En déduire qu'il existe au moins un $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ tels que $A\overline{x}=\lambda\overline{x}$ et $\|\overline{x}\|_2=1$.
3. Montrer qu'il existe un plus grand tel λ, et déterminer le maximum global de $\langle x,Ax\rangle$ sous la contrainte $\|x\|^2=1$ en fonction de ce λ.

Exercice 15. Inégalité de Hadamard. Dans cet exercice, on cherche à montrer que, pour tous $n-$uplets de vecteurs $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^n)^n$, on a

$$|\det(x_1,\dots,x_n)|\leq\|x_1\|\dots\|x_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le problème est equivalent à montrer que

$$\sup_{(e_1,\dots,e_n)\in\mathcal{E}}|\det(e_1,\dots,e_n)|\leq 1,$$

   où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ formées de vecteurs normés.
2. Montrer que, si $x_2,\dots,x_n$ est une famille libre donnée et si x_1 est un maximum de la fonction $\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}$, $\xi\mapsto\det(\xi,x_2,\dots,x_n)$, alors x_1 est orthogonal à x_2, ..., x_n.
3. En déduire que tout maximiseur est une base orthonormale, et conclure.

Exercice 16. Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On s'intéresse au problème :

$$V(\alpha):=\inf\{f(x):g(x)=\alpha\}$$

On suppose qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\alpha\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, le problème précédent admette une unique solution x_α. On suppose en outre que :

$$dg_{x_0}\neq 0 \text{ et que } \alpha\mapsto x_\alpha \text{ est différentiable en } 0.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $\mu_0\in\mathbb{R}$ tel que $df_{x_0}=\mu_0 dg_{x_0}$.
2. Montrer que V est différentiable en 0 et que $V'(x_0)=\mu_0$.