Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 6 — Théorème des fonctions implicites.

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0,$$

1. Montrer qu'il existe une fonction Φ sur un domaine $D_\Phi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a,
$$(x, y) \text{ est solution} \iff x \in D_\Phi \text{ et } y = \Phi(x).$$
2. Montrer qu'il existe une fonction Ψ sur un domaine $D_\Psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a,
$$(x, y) \text{ est solution} \iff y \in D_\Psi \text{ et } x = \Psi(y).$$
3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions Φ et Ψ ?

Exercice 2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 1$.

1. Montrer que pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$.
2. Faire un dessin de $x \mapsto y(x)$.
3. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0, $y'(x) = -\frac{3x}{5y(x)}$.
4. En déduire un développement à l'ordre 2 de y au voisinage de 0.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est proche de A, alors M possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continument de M.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère l'équation

$$(x - a)(x - b) - \varepsilon x^3 = 0.$$

1. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation admet trois solutions distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$.
2. Donner un développement asymptotique de $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Exercice 5.

1. Donner une valeur approchée de la solution, proche de 1, de l'équation
$$x^7 + 0{,}99\,x - 2{,}03 = 0.$$
2. Montrer que la solution exacte vérifie $1 \leq x \leq 2$.

Exercice 6. On considère le système de trois équations à quatre inconnues

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2, \\ x + y + z + t = 0, \end{cases}$$

dont on cherche les solutions dans $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(0, -1, 1, 0)$ et une fonction $\Phi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 tels que $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \Phi(t)$.
2. Calculer la dérivée de Φ en 0.

Exercice 7. Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, telle que $f(0)=0$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire df_0.

1. Montrer que 0 est un point fixe isolé.
2. *Application.* Soit $f(x,y)=(x(\sin(xy)-1)+y, y(\cos(xy)-1)+x)$. Montrer que f ne s'annule pas dans un voisinage épointé de l'origine, c'est à dire que dans un voisinage de l'origine, si $f(x,y)=(0,0)$, alors $(x,y)=(0,0)$.
3. Soit $g:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus que f est de classe C^1 et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit
$$f_\lambda(x)=f(x)+\lambda g(x)$$
Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon>0$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\omega:]-\varepsilon,\varepsilon[\mapsto\mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que, pour tout $\lambda\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\omega(\lambda)$ est l'unique point fixe de f_λ dans $\mathcal{V}$.
4. *Application.* Soit l'application $G:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ définie par
$$G_\lambda(x,y,z)=\left(2xe^x+y+\lambda e^{-(x^2+y^2)},\sin(z)+\lambda\cos(x+y-z),2y\cos(x)+\lambda\right)$$
Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $|\lambda|<\varepsilon$, l'application G_λ admet un point fixe unique dans $\mathcal{V}$.

Exercice 8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation
$$M^3+N^3-3MN=I_n,$$
d'inconnue $(M,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que l'équation définit localement $M=\Phi(N)$ au voisinage de $(M,N)=(0,I_n)$.
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de Φ au voisinage de l'identité.

Exercice 9. Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $x-zt=f(z)$ définit localement z fonction implicite de t et x.
2. Montrer que l'on a alors : $\frac{\partial z}{\partial t}+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

Exercice 10. Soit $f:(\mathbb{R}^3,(a,b,c))\to(\mathbb{R},0)$ une fonction de classe C^1 telle que
$$\partial_x f(a,b,c)\neq 0,\ \partial_y f(a,b,c)\neq 0,\ \partial_z f(a,b,c)\neq 0.$$
On note X,Y,Z les fonctions, définies implicitement et localement, telles que
$$f(x,y,z)=0\Leftrightarrow x=X(y,z)\Leftrightarrow y=Y(x,z)\Leftrightarrow z=Z(x,y).$$
Que vaut le produit $\partial_y X\,\partial_z Y\,\partial_x Z$ au point (a,b,c) ? *C'est la formule de Clapeyron.*

Exercice 11. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi:U\mapsto\mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^1$: $\phi=(f,g)$. On considère (u,v) réels et on cherche x,y tels que
$$\phi(x,y)=(u,v).$$

1. A-t-on des solutions si la différentielle de ϕ est de rang 0 ?
2. On suppose que la différentielle de ϕ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u,v) tel que le système admet une solution, elle est unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de ϕ est de rang 1 en tout point de U.
   (a) Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi:(x,y)\mapsto(f(x,y),y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V\subset U$ sur $\psi(V)$.
   (b) En déduire G telle que $g(x,y)=G(f(x,y))$ sur V.
   (c) Que peut-on dire des solutions du système ?