Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n° 5 — Théorème d'inversion locale.

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice ?

Exercice 2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est en tout point un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 3. *(Théorème du rang constant)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une application de classe $\mathcal{C}^1$, dont la différentielle est de rang constant sur tout un voisinage V de $b \in \mathbb{R}^n$, disons $r \in [\![0, n]\!]$. On veut montrer qu'il existe un changement de coordonnées locales $x \mapsto X$ au départ et un changement de coordonnées locales $y \mapsto Y$ à l'arrivée qui transforment f en l'application linéaire (de rang r) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$A : (X_1, \ldots, X_n) \mapsto Y = (X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0).$$

1. Montrer que l'on peut, sans perte de généralité, se ramener au cas ou $b = 0$, $f(b) = 0$, $df_b = A$.
2. Montrer que les relations

   $$(X_1, \ldots, X_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n), x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

   définissent bien un changement de coordonnées locales au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.
3. Ecrire la relation $y = f(x)$ dans les coordonnées (x, y) sous forme d'une relation $y = \varphi(X)$ dans les coordonnées (X, y). Montrer que seuls les r premières coordonnées $(X_1, \ldots, X_r)$ apparaissent dans φ.
4. Montrer que les relations

   $$(y_1, \ldots, y_n) = (Y_1, \ldots, Y_r, \varphi_{r+1}(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_{r+1}, \ldots, \varphi_n(Y_1, \ldots, Y_r) + Y_n)$$

   définissent bien un changement de coordonnées locales au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui répond à la question.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire et $\| \cdot \|_E$ la norme associée. Soit $f : E \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E, \qquad \langle df_x(h) | h \rangle \geq \alpha \|h\|_E^2.$$

1. Montrer pour $x, y \in E$: $\langle f(x) - f(y) | x - y \rangle_E \geq \alpha \|x - y\|_E^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Déterminer $f(\mathbb{R}^3)$ et montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 6. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$, le problème

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

admet une solution $(x(a,b), y(a,b)) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on assurer l'unicité de la solution ?

Exercice 7. On considère l'application

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right) \end{array} \right).$$

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer la jacobienne de ϕ et montrer que $d\phi_{(x,y)}$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire que ϕ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur son image et que cette image est ouverte.
4. Montrer que, pour tous $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tels que

   $$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$

   En déduire que ϕ est injective.
5. Montrer que $\phi(\mathbb{R}^2)$ est fermé.
6. Montrer que ϕ est un difféomorphisme global.
7. Soit $(u,v) = \phi(x,y)$. Calculer $(d\phi^{-1})_{(u,v)}$ en fonction de $d\phi_{(x,y)}$.
8. Montrer que ϕ^{-1} est Lipschitzienne.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ (resp. n) et $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > \ldots > x_n\}$.

1. Montrer que l'application $\Psi : D_n \mapsto \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par

   $$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) - X^n,$$

   est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de D_n sur son image.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes scindés à racines simples de degré n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9. On considère le plan euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $M, N \in \mathbb{R}^2$, on note $|MN|$ la distance entre M et N. On pose $A = (a, 0)$ et $B = (-a, 0)$ et on définit les fonctions

$$\phi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = (x,y) & \longmapsto & |MA| \end{array} \right., \qquad \phi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = (x,y) & \longmapsto & |MB| \end{array} \right.,$$

et

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & (\phi_1(M), \phi_2(M)) \end{array} \right..$$

1. Faire un dessin.
2. En quels points ϕ est-elle différentiable ? Montrer qu'en ces points elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que l'application ϕ est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ sur $\phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et déterminer alors $\phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 10. Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Soient U un voisinage ouvert de 0 dans E et $\Psi : U \mapsto \mathcal{L}(E)$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\Psi(0) = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 contenu dans U dont l'image $\Psi(V)$ est contenue dans $GL(E)$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto (\Psi(x))(x)$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.