Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n° 4 — Point fixe et Homéomorphismes.

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit f une application contractante (pour d) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) := x + f(x).$$

Montrer que g est bijective et que sa réciproque est Lipschitzienne.

Exercice 2. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (\cos(x) - \sin(y), \sin(x) - \cos(y)) .$$

1. Choisir une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\|dF_{(x,y)}\| \leq \sqrt{2}$.
2. En déduire que la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\cos(x_n) - \sin(y_n)\right), \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sin(x_n) - \cos(y_n)\right). \end{cases}$$

   converge pour tout (x_0, y_0).
3. Donnez l'équation que vérifie sa limite. La limite dépend-elle du point de départ (x_0, y_0) ?

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 < 1$.
Montrer que pour tout $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i - \sum_{j=1}^n \sin\left(a_{i,j} x_j\right) = b_i$$

admet une unique solution.

Exercice 4. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue f sur $[0,1]$ vérifiant pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \sup_{y \in [0,1]} \Big(\cos(x^2 - y^2) + \alpha f(y)\Big).$$

Exercice 5. *(J.-C. Yoccoz)* Soit (x_n) une suite réelle définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

On veut montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) soit bornée à valeurs positives.

1. Montrer que, si (x_n) est bornée, pour tout n on a $10 \leq x_n \leq 11$.
2. Soient X l'ensemble des suites réelles (y_n) de $[10, 11]$, d la distance

$$d((y_n), (z_n)) = \sup_n |y_n - z_n|$$

   et F l'opérateur

$$F : X \to X, \quad (y_n) \mapsto (z_n), \quad z_n = \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}.$$

   Vérifier que F est bien défini. Quel est son rapport de Lipschitz ?
3. Conclure. On donnera une estimation de l'unique point fixe (a_n) de F.

Exercice 6.

1. Montrer que si $f : E \mapsto F$ est un homéomorphisme, alors pour toute partie A de E, on a
$$f\left(\operatorname{Int}(A)\right) = \operatorname{Int}\left(f(A)\right), \qquad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$
2. Montrer que « être une suite de Cauchy » n'est pas invariant par homéomorphisme.
3. Montrer que « être borné » n'est pas invariant par homéomorphisme.

Exercice 7.

1. Classer les lettres « ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ » par classes d'homéomorphismes.
2. Le symbole ∞ est il homéomorphe à un cercle ?
3. Une droite est-elle homéomorphe à un plan ?
4. Un tore à un trou est-il homéomorphe à un tore à deux trous ? *(On fera des dessins.)*

Exercice 8. Soit $f : U \to V$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^q$. On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g, différentiable au point $b = f(a)$. Démontrer que $p = q$.

Exercice 9.

1. Un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ est-il un difféomorphisme ?
2. Tous les intervalles réels ouverts non vides sont-ils difféomorphes ? Si oui, précisez un difféomorphisme.
3. Un carré est il difféomorphe à un cercle ?
4. La boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ est-elle difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ tout entier ?

Exercice 10. Les applications suivantes sont elles des difféomorphismes ?

1. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.
2. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{it}$.
3. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
4. Un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.
5. Un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels normés.

Exercice 11. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Montrer que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur $f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Exercice 12. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ par
$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
Déterminer $f \circ f$ et montrer que f est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ dans lui-même.

Exercice 13. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application f par $f(x,y) = (x+y, xy)$.

1. Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser (faire des dessins).
2. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

Exercice 14.

1. Montrer que l'application Φ définie par
$$\Phi : (u,v) \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right), \frac{u}{v}\right)$$
définit un changement de variable entre deux ouverts que l'on précisera.
2. En utilisant le changement de variables précédent, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante
$$2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$