Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n^{o} 3 — Applications différentiables (fin ?).

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

Exercice 1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est de classe C^2. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \quad f(x,x) = g'(x).$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 2. Soit la fonction g définie par $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de g au point $(0,0)$.
3. Déterminer les fonctions dérivées partielles premières de g. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$ est-elle différentiable ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A : $(\mathrm{Com}(A))_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\widehat{A}^{ij})$, où $\widehat{A}^{ij}$ correspond à la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} & \mapsto & \det(A). \end{array}$

1. Calculer $f(A+tE_{ij})$ (où E_{ij} est la matrice élémentaire ayant un 1 en position (i,j) et nulle ailleurs). En déduire la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donner une expression simple de sa différentielle en A appliquée à une matrice H.
3. Lorsque A est inversible, calculer la différentielle de f en A en fonction de celle en I_n. En déduire que $\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)\,A^{-1}$.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^2$ de la nome euclidienne et l'espace des matrices carrées de la norme opérateur.

1. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$
avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la norme de A.
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ par
$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
Ecrire la matrice jacobienne de f et calculer sa norme.
3. Montrer que l'application linéaire $df_{(x,y)}$ conserve les angles dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f:(x,y,z)\mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)+\arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)+\arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x, y, z sont strictement positifs. Interpréter le résultat.

Exercice 7. On considère l'application f définie par :

$$f(x,y,z)=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}, xy\exp(z), x^2+y^3+4z\right).$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est différentiable sur son domaine et calculer sa matrice jacobienne en tout point du domaine.
3. Calculer la norme de $J_f(x)$ en $x=(1,1,0)$ pour $\mathbb{R}^3$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ puis de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 8. Soit $c\in\mathbb{R}$.

1. Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(t,x)\mapsto f(t,x)$, de classe C^1 vérifiant l'*équation de transport*
$$\partial_t f + c\partial_x f = 0.$$
2. Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto f(x,t)$, de classe C^2 vérifiant l'*équation de propagation des ondes*
$$\partial_{tt} f - c^2\partial_{xx} f = 0.$$

Exercice 9. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U=\{(x,y) \text{ tq } x>0,\ y>0\}$, et $b\in\mathbb{R}$. Trouver $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=b.$$

On utilisera le changement de variable : $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$, ou alors le passage en coordonnées polaires.

Exercice 10. Soit $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $y\partial_x f - x\partial_y f = 2f$. On pose $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Trouver f.

Exercice 11. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est positivement homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ si $f(\lambda x)=\lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda>0$ et tout $x\in\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et positivement homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ alors
$$\sum_{i=1}^n x_i\partial_{x_i} f(x)=\alpha f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$
2. Soit $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :
$$\forall (x,y)\in\Omega,\qquad x\partial_x f + y\partial_y f = \alpha f.$$
On étudiera $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, trouver un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions $f:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2+x}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2+y}{x}$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1-y}{(x+y+1)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2+x}{(x+y+1)^2}$.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$.
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-\dfrac{x}{y^2}$.