Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 2 — Applications différentiables (suite).

Les exercices de cette feuille sont tirés d'anciennes feuilles de TD de Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant, et même quelques exercices tirés de feuilles de TD du temps où le Calcul Différentiel était traité en L2).

1 Propriétés des différentielles

Exercice 1. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle (simplifier si possible).

$$\Phi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \sin \operatorname{Tr}(A^3), \end{array} \qquad \Psi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & e^{\operatorname{Tr}(AA^\top)}. \end{array}$$

Exercice 2. On suppose que f est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dériver la fonction u donnée par $u(x) = f(x, -x)$ et calculer la différentielle de l'application g donnée par $g(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux applications différentiables. Montrer que

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x + g(x, y)). \end{array}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 4. Soient les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \qquad g(x, y) = x^y,$$
$$h(x, y) = \exp(xy) \ln(1 + x^2 + y^2), \qquad k(x, y) = \frac{y \sin(xy)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Montrer que les domaines de ces fonctions sont des ouverts, que ces fonctions sont différentiables sur leurs domaines, et calculer leurs gradients.

Exercice 5. ($\mathbb{C}$-dérivabilité). Soit $f : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes (et faire un dessin pour illustrer la troisième propriété) :

1. La fonction est $\mathbb{C}$-dérivable : en tout point z, la limite de $\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$ lorsque $\zeta \to 0$ existe dans $\mathbb{C}$ (on la notera encore $f'(z)$).
2. La fonction (vue comme une fonction de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) est différentiable, et pour tout $z = x + iy \in U$ (identifié au point (x, y) de $\mathbb{R}^2$), l'équation de Cauchy-Riemann est satisfaite :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z).$$
3. La fonction est conforme, c'est à dire qu'elle est différentiable (vue comme une fonction de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) et conserve les angles, au sens où pour γ_1 et γ_2 deux chemins réguliers arbitraires (dérivables avec seulement des points réguliers) d'un intervalle ouvert I (contenant 0) dans U, tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$, on a toujours la propriété suivante : en notant $\widetilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ et $\widetilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ les chemins correspondants après transformation par f, alors soit $\widetilde{\gamma}_1'(0) = \widetilde{\gamma}_2'(0) = 0$, soit $\widetilde{\gamma}_1'(0) \neq 0$ et $\widetilde{\gamma}_2'(0) \neq 0$, et l'angle orienté entre $\widetilde{\gamma}_1'(0)$ et $\widetilde{\gamma}_2'(0)$ (les tangentes aux chemins en ce point régulier) est le même que l'angle orienté entre $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$.

En Analyse Complexe, on montre en fait que si f est $\mathbb{C}$-dérivable, alors elle est localement développable en série entière et donc de classe C^∞.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), 2xy). \end{array}$$

Déterminer f de sorte que $d\phi_{(x,y)}$ soit une similitude pour tout (x,y).

Exercice 7.

1. Soit une application différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit une application différentiable $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Montrer que l'application $u = f \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ résout l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. Etant donné une application différentiable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trouver une solution u de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \sin x \,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

telle que $u(0,y) = g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

2 Révisions : connexité

Exercice 8. Parmi les ensembles suivants, dire, en le justifiant, lesquels sont connexes ou préciser leurs composantes connexes.

$$\begin{array}{l} A = \{0\} \cup [1,2], \\ B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1\}, \\ D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\}, \\ E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x + y + z \leq 1\}, \\ F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2\}, \\ G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y^2\}. \end{array}$$

Exercice 9. L'intérieur d'une partie connexe (resp. connexe par arcs) est-il toujours connexe (resp. connexe par arcs) ?

Exercice 10. Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si A est connexe, alors sa frontière est connexe.
2. Si $\bar{A}$ est connexe, alors A est connexe.
3. Si A et B sont connexes, alors $A \cap B$ est connexe.
4. Si A et B sont connexes, alors $A \cup B$ est connexe.
5. Si $f : A \to F$ est continue, avec A convexe et F espace vectoriel normé, alors $f(A)$ est convexe.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On cherche à montrer qu'un **ouvert** U de E est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

1. Justifier qu'une implication est toujours vraie même si U n'est pas supposé ouvert.
2. Justifier que l'équivalence est fausse si U n'est pas supposé ouvert.
3. On suppose maintenant que U est connexe mais n'est pas connexe par arcs, c'est-à-dire qu'il existe deux points a et b de U qui ne sont pas reliés par un chemin continu. On définit alors les deux ensembles

$$X = \{x \in U,\, x \text{ est connecté à } a\}, \qquad Y = \{x \in U,\, x \text{ n'est pas connecté à } a\}.$$

   (a) Montrer que X et Y sont des ouverts-fermés non vides de U.
   (b) Conclure.