Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 1 — Applications différentiables (premières propriétés).

Les exercices de cette feuille sont tirés des feuilles de TD de Topologie (Olivier Glass, L2, 2022-2023) et Calcul Différentiel et Optimisation (Emeric Bouin, L3, 2022-2023, Jacques Féjoz, Guillaume Carlier, quelques années auparavant).

1 Révisions : applications linéaires continues

Exercice 1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires et/ou continues par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}[X]$ (donnée par $\|P\|_\infty = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$) et à une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2, \quad P \mapsto (P(0), P'(0))$,
2. $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2, \quad P \mapsto (P(0), P'(1))$.

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés **de dimension finie** et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. Montrer que f est continue. Les *deux* espaces E et F doivent-ils être simultanément de dimension finie pour assurer cette propriété ?

Exercice 3. Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n. et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 4. Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire.

1. Soit $a \in E$. Démontrer que f_a définie par $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ est continue.
2. En déduire que l'orthogonal de toute partie de E est un fermé de E.

Exercice 5. *(Inégalité de Hardy)*
Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$. On note g la moyenne de f entre 0 et x,

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \text{ si } x \neq 0, \qquad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^x g(t)^2\, dt = 2\int_0^x f(t)g(t)\, dt - xg(x)^2.$$
2. En déduire que, pour $x \geq 0$,
$$\left(\int_0^x g(t)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\int_0^x f(t)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$
3. L'application de E dans lui même qui a f associe g est-elle bien définie ? Est-elle continue ?
4. Quelle est la norme de $f \mapsto g$? *On pourra considérer $f_a(x) = \min(1, |x|^{-a})$, pour $a > \frac{1}{2}$.*

2 Courbes paramétrées : chemins dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Etudier les courbes paramétrées suivantes :

$$\left\{x(t) = \cos^2 t, y(t) = \cos^3 t \sin t\right. \qquad \begin{cases} x(t) = 3\cos t + 2\cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin(3t) \end{cases}$$

On pourra écrire la première comme l'union de deux graphes de fonctions pour étudier la tangente à la courbe en $(0,0)$. On détaillera les symétries de la deuxième.

Exercice 7. Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}.$$

Trouver les droites à la fois tangentes et orthogonales à la courbe.

3 Différentiabilité. Premiers exemples.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E, équivalentes. Montrer qu'une application f est différentiable sur $(E, \|\cdot\|_1)$ si et seulement si elle l'est sur $(E, \|\cdot\|_2)$.

Exercice 9. Calculer la différentielle des applications suivantes (en un point quelconque) :

1. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^\top M$.
2. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^3$.
3. $GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$ (en admettant qu'elle est différentiable, et que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert).

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f possède une dérivée directionnelle en $x \in \mathbb{R}^2$ le long de $h \in \mathbb{R}^2$ si $\frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$ a une limite lorsque $t \to 0$, que l'on note alors $\widetilde{D}f(x)(h)$. On sait que lorsque f est différentiable en x, on a $Df(x)(h) = \widetilde{D}f(x)(h)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction qui a des dérivées directionnelles en $(0,0)$ le long de toutes les directions $h \in \mathbb{R}^2$ mais qui est discontinue en $(0,0)$ *(Indication : voir le TD d'introduction, ou prendre une fonction constante sur une parabole — privée de l'origine — et nulle en dehors).*
2. Montrer qu'il existe une fonction f ayant des dérivées directionnelles en $(0,0)$ le long de toutes les directions $h \in \mathbb{R}^2$ mais pour laquelle $h \mapsto \widetilde{D}f((0,0))(h)$ n'est pas linéaire *(Indication : prendre f linéaire sur l'axe des abscisses et nulle en dehors).*
3. Montrer que si $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ est un chemin dérivable en 0 et que f est différentiable en $\gamma(0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f\circ\gamma)'(0) = Df(\gamma(0))(\gamma'(0))$ (ceci est une première instance de la formule de différentiation des fonctions composées).
4. En déduire qu'il existe une fonction f continue en $(0,0)$, ayant des dérivées directionnelles en $(0,0)$ le long de toutes les directions $h \in \mathbb{R}^2$, pour laquelle $h \mapsto \widetilde{D}f((0,0))(h)$ est linéaire, mais qui ne soit pas différentiable en $(0,0)$ *(Indication : prendre f « linéaire » le long d'une parabole, et nulle en dehors).*

Exercice 11. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$, $(E_3, \|\cdot\|_3)$ des espaces vectoriels normés et a une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans E_3. On rappelle que $E_1 \times E_2$ est naturellement muni d'une norme à partir de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$: par exemple $\|(x_1, x_2)\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$.

1. Montrer que a est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on ait
$$\|a(x_1, x_2)\|_3 \leqslant C\|x_1\|_1\|x_2\|_2.$$
2. Montrer que dans ce cas a est différentiable et calculer sa différentielle. Retrouver la formule de la différentielle du produit à partir de la formule de la différentielle de la composée.

Exercice 12.

1. Montrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas différentiable en 0.
2. Montrer que la norme $\|\cdot\|_2$ est différentiable en dehors de 0 et calculer son gradient.
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables en dehors de l'origine ?