Calcul Différentiel et Optimisation (2023)
Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 0 — Introduction.

L'objet de cette feuille de TD est de découvrir un panorama des notions qui seront abordées dans ce cours sur des exemples particuliers, (souvent en dimension 1 ou 2), et qui ne font appels qu'à des notions de base des deux premières années. C'est aussi l'occasion de faire quelques révisions !

Exercice 1.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 : c'est-à-dire qu'il existe des réels a, b tel que
$$f(x) = a + b\,(x - x_0) + o(x - x_0).$$
2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, mais que f n'est pas dérivable deux fois en 0.

On verra dans le cours une extension de la notion de dérivée en dimension supérieure (et même une définition dans des espaces de Banach).

Exercice 2. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est « continue dans toutes les directions », plus précisément que la restriction de f à toute droite de $\mathbb{R}^2$ est continue.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

On verra dans le cours que lorsqu'on s'intéresse aux propriétés de dérivabilité, on peut cette fois-ci passer de « continuité des dérivées directionnelles » (et même seulement dans les directions de la base) à « continûment dérivable » tout court.

Exercice 3. Soit f une fonction d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est strictement croissante, alors c'est une bijection entre I et son image. Si f est continue, montrer que sa bijection réciproque est continue.
2. Montrer que si f est une bijection continue, alors elle est strictement monotone.
3. On suppose que f est de classe C^1. Si en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $f'(x_0) \neq 0$, montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$ et que la restriction de f à J soit une bijection sur son image.
4. Montrer que si f est de classe C^1 et que f' ne s'annule jamais sur I, alors f est une bijection de I sur son image, et donner l'expression de la dérivée de sa bijection réciproque.

On verra dans le cours une généralisation en dimension plus grande (le théorème d'inversion locale). Attention cependant pour le dernier point, inverser globalement une fonction dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$ nécessite plus de travail !

Exercice 4. Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si x_0 est un point de minimum (ou maximum local) et que f est dérivable, alors $f'(x_0) = 0$, mais que la réciproque est fausse.
2. Montrer que si f est de classe C^2 avec $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum local.
3. Donner la définition d'une fonction convexe (et strictement convexe). Lorsqu'une fonction est dérivable, rappeler la caractérisation de la convexité. Rappeler (et retrouver la démonstration) de la caractérisation de la stricte convexité dans ce cas.
4. Si f est deux fois dérivable, montrer que f convexe équivaut à $f'' \geqslant 0$. Si $f'' > 0$, montrer que f est strictement convexe mais que la réciproque est fausse.

On généralisera ceci (formule de Taylor) aux fonctions d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ (ouvert convexe pour les dernières propriétés).

Exercice 5. On considère dans le plan l'ensemble $\mathcal{H}$ défini par l'équation implicite $3x^2 + 2xy - y^2 = 4$:

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x^2 + 2xy - y^2 = 4\}.$$

1. On considère la droite D_α passant par $(0, 0)$ et de pente $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de points d'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{D}_\alpha$ suivant la valeur de α.
2. En déduire une description de $\mathcal{H}$ comme l'union de deux courbes paramétrées, c'est-à-dire trouver deux fonctions continues γ_1 et γ_2, de I (un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à déterminer) dans $\mathbb{R}^2$, dont l'union des images est $\mathcal{H}$. On notera $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ et $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ (avec $x_1(t) > 0$ pour tout $t \in I$).
3. Étudier les variations de x_1, x_2, y_1, y_2 et faire un dessin de ces deux courbes paramétrées.
4. À l'aide de l'exercice 3, montrer que l'image de γ_1 est l'union du point $(1, 1)$ et de deux graphes de fonctions continues $\varphi_{1,+}$ et $\varphi_{1,-}$ sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de donner l'expression de ces fonctions). Ces parties de la courbe sont alors décrites par les équations $y = \varphi_{1,+}(x)$, ou $y = \varphi_{1,-}(x)$: on obtient une coordonnée à partir de l'autre.
5. Montrer que l'image de γ_1 est l'ensemble des points de la forme $x = \psi_1(y)$ pour ψ_1 une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi quand on exprime plutôt x en fonction de y, on n'a « qu'un seul morceau ».

On verra dans le cours le théorème des fonctions implicites, qui permet de donner des conditions qui garantissent qu'au voisinages de certains points d'un ensemble défini par une équation implicite, on peut exprimer certaines coordonnées en fonction des autres.

Exercice 6. On s'intéresse aux ensembles de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

1. Exprimer les ensembles de niveau (de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$) comme des courbes paramétrées ou des graphes de fonctions (et faire un dessin).
2. On se donne un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note $u(t) = f(x_0 + t, y_0)$, $v(t) = f(x_0, y_0 + t)$, et on définit le vecteur $Z = (u'(0), v'(0))$. Ce vecteur, appelé *gradient* de f au point (x_0, y_0), est noté $\nabla f(x_0, y_0)$.
   (a) Si l'ensemble de niveau passant par (x_0, y_0) est une courbe donnée par le graphe d'une fonction dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente à la courbe au point (x_0, y_0), et montrer que Z est orthogonal à cette droite (et faire des dessins).
   (b) Écrire l'ensemble de niveau passant par (x_0, y_0) comme une courbe paramétrée $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ avec $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et γ dérivable en t_0 (chaque composante l'est). Montrer que Z est orthogonal à $\gamma'(t_0)$.
3. Reprendre les questions précédentes avec $f : (x, y) \mapsto xy$. Montrer que le gradient X ne s'annule qu'en un seul point. Est-ce un point de minimum ou de maximum pour f ?

Le cours abordera cette notion de gradient, on s'intéressera à l'optimisation libre (ou sans contraintes) de fonctions de plusieurs variables.

Exercice 7. On cherche à maximiser la valeur de $f(x, y) = xy$ sur l'ensemble des points (x, y) satisfaisant l'équation $x^2 + y^2 = 1$ (appelée *contrainte*).

1. À l'aide d'une courbe paramétrée, trouver l'unique point de maximum (x_0, y_0).
2. On note $g(x, y) = x^2 + y^2$. On définit les gradients de f et g comme dans l'exercice 6. Montrer que $\nabla f(x_0, y_0)$ et $\nabla g(x_0, y_0)$ sont colinéaires, et trouver tous les points où c'est le cas.

On généralisera dans le cours : optimisation liée.