PARTIE À RABATTRE

Problème : autour du théorème des accroissements finis.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème des accroissement finis pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque. On commence par en démontrer une variante pour des fonctions continues, avec une hypothèse un peu plus faible que la dérivabilité.
On rappelle la définition de la limite inférieure à droite pour une fonction h de $[0, \delta[$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\delta > 0$) :

$$\liminf_{\tau \to 0^+} h(\tau) = \lim_{\tau \to 0^+} \inf_{u \in]0,\tau]} h(u).$$

I. Une variante continue. Soit F un espace vectoriel normé et g une fonction continue de $[0,1]$ dans F. On suppose qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\liminf_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\tau} \|g(t+\tau) - g(t)\| \leqslant K.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\varphi(t) = \|g(t) - g(0)\| - (K+\varepsilon)t$. Montrer que φ atteint son minimum sur $[0,1]$ (en un point que l'on notera t_0).

Par composition, φ est continue sur $[0,1]$. Donc φ atteint ses bornes.
(la norme est continue)

Supposons que $t_0 < 1$. Montrer qu'il existe $s \in]t_0, 1]$ tel que $\|g(s) - g(t_0)\| < (K+\varepsilon)(s - t_0)$.

On pose $h(\tau) = \frac{1}{\tau} \|g(t_0+\tau) - g(t_0)\|$ pour $\tau \in [0, \underbrace{1-t_0}_{>0}[$.

$\liminf\limits_{\tau \to 0^+} h(\tau) \leq K$. Donc il existe $\tau > 0$ tel que $\inf\limits_{v \in]0,\tau]} h(v) < K+\varepsilon$,

puis il existe donc $v > 0$ tel que $h(v) < K+\varepsilon$ (sinon on aurait $\inf\limits_{v \in]0,\tau]} h(v) \geq K+\varepsilon$).

On pose $s = t_0 + v$ et on obtient $h(v) = \boxed{\frac{1}{s-t_0} \|g(s) - g(t_0)\| < K+\varepsilon}$

En déduire que $\varphi(t_0) > \varphi(s)$ et obtenir une contradiction.

On a $\varphi(s) - \varphi(t_0) = \underbrace{\|g(s) - g(0)\|}_{\leq \|g(s)-g(t)\| + \|g(t)-g(0)\|} - \|g(t) - g(0)\| - (K+\varepsilon)(s-t_0) \leq \|g(s) - g(t_0)\| - (K+\varepsilon)(s-t_0) < 0$.

Donc $\varphi(s) < \varphi(t_0)$, en contradiction avec le fait que t_0 est un point où φ atteint son minimum.

En déduire que l'on a $\|g(1) - g(0)\| \leqslant (K+\varepsilon)$. Et enfin que $\|g(1) - g(0)\| \leqslant K$.

On a donc $t_0 = 1$: φ atteint son min en 1. En particulier
$0 = \varphi(0) \geq \varphi(1) = \|g(1) - g(0)\| - (K+\varepsilon)$. Donc $\|g(1) - g(0)\| \leq K+\varepsilon$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\|g(1) - g(0)\| \leq K$.

II. Application. Soit U un ouvert de E (e.v.n.), et f différentiable sur U à valeurs dans F.

Sans utiliser la partie **I**, montrer que si f est Lipschitzienne, alors sa différentielle est bornée (pour la norme opérateur).

On suppose f K-lipschitzienne. Soit $x \in U$ et Soit $h \in E$. (avec $\|h\| \leq 1$)

On a $df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$

et comme (pour $t \neq 0$) $\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right\|_F \leq \frac{K\|th\|_E}{|t|} = K\|h\|_E$ on obtient à la limite que $\|df_x(h)\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|f(x+th) - f(x)\|}{|t|} \leq K\|h\|_E$. (et ceci quel que soit $h \in E$)

Donc $\|df_x\| \leq K$. donc df est bornée sur U

← norme opérateur.

Déduire de la partie **I** (et énoncer proprement) l'inégalité des accroissements finis pour f entre des points a et b de E tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U.

Montrons que si $[a,b] \subset U$ alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \underbrace{\left(\sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|\right)}_{\text{On suppose ceci fini (sinon il n'y a rien à montrer)}} \|b-a\|_E$ ← norme opérateur.

On pose $g(t) = f(a + t(b-a))$ pour $t \in [0,1]$.

f étant différentiable, elle est continue, donc par composition g est continue de $[0,1]$ dans F. De plus g est dérivable en tout point de $[0,1]$.

et $g'(t) = df_{a+t(b-a)}(b-a)$ donc pour $t \in [0,1[$, $\frac{1}{\tau}(g(t+\tau) - g(t))$ a une limite lorsque $\tau \to 0^+$ (donc également une lim inf) égale à $g'(t)$.

Donc $\liminf_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\tau}\|g(t+\tau) - g(t)\| = \|g'(t)\| \leq \|df_{a+t(b-a)}\| \|b-a\| \leq \underbrace{\left(\sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|\right) \|b-a\|_E}_{\text{notée } K}$.

Donc $\|g(1) - g(0)\| \leq K$ c'est à dire $\|f(b) - f(a)\|_F \leq K$ //

Si U est convexe, montrer que la réciproque de la première question est vraie : si la différentielle est bornée sur U, alors f est Lipschitzienne.

Soit K une borne de df sur U. et soit a,b dans U.

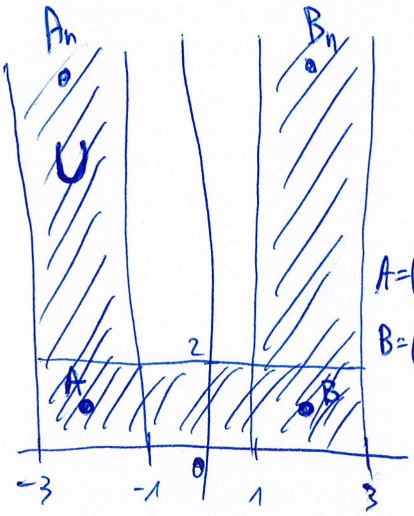
Comme U est convexe le segment $[a,b]$ est inclus dans U.

et donc $\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|\right) \|b-a\| \leq K\|b-a\|$.

Donc f est K-Lipschitzienne.

III. Un contrexemple. Soit $U = (]-3,-1[\times]0,+\infty[) \cup (]-3,3[\times]0,2[) \cup (]1,3[\times]0,+\infty[)$.
On définit $f : U \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = y\arctan(xy)$.

Faire un dessin (propre) de U et justifier que U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$.



U est l'union de 3 ouverts U_1 U_2 et U_3.
C'est donc un ouvert.
U_1, U_2 et U_3 sont convexes donc connexes.
$A = (-2,1) \in U_1 \cap U_2$ donc $U_1 \cup U_2$ est connexe
$B = (2,1) \in U_2 \cap U_3 \subset (U_1 \cup U_2) \cap U_3$ donc $\underbrace{(U_1 \cup U_2) \cup U_3}_{=U}$ est connexe.

(on pouvait aussi montrer que U est connexe par arcs, en passant toujours par les points A et B)

Montrer que la différentielle de f est bornée sur U.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \arctan(xy) + \frac{xy}{1+x^2y^2}$

Les dérivées partielles sont bornées sur $\overline{U_2} = [-3,3] \times [0,2]$ (fonctions continues sur un compact) donc sur U_2.

Si $|x| \geq 1$, $\left|\frac{y^2}{1+x^2y^2}\right| \leq \frac{y^2}{1+y^2} \leq 1$. donc $\underline{\frac{\partial f}{\partial x} \text{ est bornée sur } U_1 \text{ et sur } U_3}$.

arctan est bornée, et $\left|\frac{xy}{1+x^2y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$: on a bien $2|xy| \leq 1 + x^2y^2$ puisque $1 + x^2y^2 - 2|xy| = (1-|xy|)^2 \geq 0$.

Donc $\underline{\frac{\partial f}{\partial y} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^2}$ (donc sur U).

Donc $\underline{\text{la différentielle de } f \text{ est bornée sur } U}$ (la Jacobienne est bornée) déf

---

La fonction f est elle Lipschitzienne sur U ? $\boxed{\text{NON}}$

On prend $A_n = (-2, n)$ et $B_n = (2, n)$. $\|B_n - A_n\| = 4$
$\underline{A_n, B_n \text{ sont dans } U}$.

$f(A_n) = n\arctan(-2n)$ $f(B_n) = n\arctan(2n)$.

Donc $\|f(A_n) - f(B_n)\| = 2n\arctan(2n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.

Si f était Lipschitzienne sur U, $\|f(A_n) - f(B_n)\|$ serait bornée.
(puisque $\|B_n - A_n\|$ est bornée).

Exercice 1. Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Trouver l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2$.

On pourra poser $U(x,y) = xy$, $V(x,y) = \frac{x}{y}$, et montrer que toute solution peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = g(U(x,y),V(x,y))$ avec $g : (u,v) \mapsto g(u,v)$ une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.

pour $\begin{cases} x>0, y>0 \\ \text{et } u>0, v>0 \end{cases}$, on a $\begin{cases} U = xy \\ V = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{UV} \\ y = \sqrt{\frac{U}{V}} \end{cases}$.

Si f est une solution, on pose $g(u,v) = f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$. On a bien g $\mathcal{C}^1$ sur Ω par composition. et pour $x,y>0$, on a $g\left(xy, \frac{x}{y}\right) = f\left(\sqrt{xy\frac{x}{y}}, \sqrt{\frac{xy}{\frac{x}{y}}}\right) = f(x,y)$.

On a donc $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(U(x,y),V(x,y))\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}(U(x,y),V(x,y))\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\times y + \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\times\frac{1}{y}.$$

de même $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\times x + \frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right)\times\frac{-x}{y^2}.$$

Donc $$\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2\frac{x}{y}\frac{\partial g}{\partial v}\left(xy,\frac{x}{y}\right) = 2x^2.$$

Pour $u,v = xy, \frac{x}{y}$, on a donc $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = xy = u$. Donc $g(u,v) = \int_1^v \frac{\partial g}{\partial v}(u,t)\,dt + g(u,1)$
$= \int_1^v u\,dt + g(u,1)$.
$= uv \underbrace{- u + g(u,1)}_{=h(u)}$

$g(u,v) = uv + h(u)$ $\boxed{\text{avec } h \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})}$

Donc $\boxed{f(x,y) = x^2 + h(xy)}$ $\boxed{\text{Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie bien l'équation}}$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par
$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2)A^\top + \sin(\langle x, Ax\rangle)\mathrm{I}_n.$$

Montrer que Φ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Par produits et composition, Φ est différentiable.

$f : A \mapsto A^2$ différentiable $df_A(H) = AH + HA$. (différentielle d'un produit, id $A \mapsto A$ linéaire, sa différentielle en tout point est id.)

Tr linéaire (continue), sa différentielle en tout point est elle même.

Si $g(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ $dg_A(H) = \mathrm{Tr}(df_A(H)) = \mathrm{Tr}(AH+HA) = 2\,\mathrm{Tr}(AH)$.

$h(A) = \langle x, Ax\rangle$ est linéaire (continue). $dh_A(H) = \langle x, Hx\rangle$.

Comme $\Phi(A) = g(A)\times \underbrace{A^T}_{\text{linéaire : différentielle en } H : H^T} + \sin(h(A))\underbrace{I_n}_{\text{constante, différentielle nulle.}}$, par la différentielle du produit, de la composée :

$$\boxed{d\Phi_A(H) = dg_A(H)\times A^T + g(A)\times H^T + \cos(h(A))\,dh_A(H)I_n + 0.}$$
$$\boxed{= 2\,\mathrm{Tr}(AH)A^T + \mathrm{Tr}(A^2)H^T + \cos(\langle x, Ax\rangle)\langle x, Hx\rangle I_n}$$

Exercice 3. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \sqrt{2}\sin^2 t, \\ y(t) = \sin(2t). \end{cases}$

On considère la courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$.

Étudier (soigneusement) les variations de x et y sur $[0, \pi]$.

$x'(t) = -2\sin t + 2\sqrt{2}\sin t\cos t = 2\sqrt{2}\underbrace{\sin t}_{\geq 0}\underbrace{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \cos t\right)}_{\leq 0 \text{ sur } [0, \frac{3\pi}{4}],\ \geq 0 \text{ sur } [\frac{3\pi}{4}, \pi]}$

$=0$ en 0 et π

$y'(t) = +2\cos 2t$ (≥ 0 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, ≤ 0 sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, ≥ 0 sur $[\frac{3\pi}{4}, 0]$)

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$x(t)$	2	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	-2
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

Calculer $\gamma'(\frac{\pi}{2})$. En déduire la pente de la tangente à la courbe au point $\gamma(\frac{\pi}{2})$.

$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - 0\right) = -2 \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2.$

Donc $\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \binom{-2}{-2}$ La pente de la tangente (dirigée par $\binom{-2}{-2}$) vaut donc 1

Calculer $\gamma''(\frac{3\pi}{4})$. En déduire un développement limité de γ à l'ordre 2 en $t = \frac{3\pi}{4}$, puis la pente des demi-tangentes à la courbe au point $\gamma(\frac{3\pi}{4})$ (et le point où la demi-tangente coupe l'axe des abscisses).

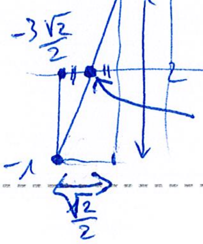
$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t - 2\sqrt{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ -4\sin 2t \end{pmatrix}$ donc $\gamma''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 4 \end{pmatrix}$

Comme $\gamma'(t) = 0$ on a $\gamma\left(\frac{3\pi}{4} + h\right) = \gamma\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 0 \times h + \frac{1}{2}\gamma''\left(\frac{3\pi}{4}\right)h^2 + o(h^2)$

$= \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{pmatrix} h^2 + o(h^2).$

La demi tangente est la droite passant par $\begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, dirigée par $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{pmatrix}$, de pente $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

Elle coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{-5\sqrt{2}}{4}, 0\right)$



$-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-5\sqrt{2}}{4}$

Tracer soigneusement l'image de la courbe sur $[0, \pi]$ au vu des questions précédentes, puis sur $[-\pi, 0]$ (en expliquant pourquoi).

On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Donc $\gamma(-t)$ est le symétrique de $\gamma(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc tracer l'image de la courbe sur $[-\pi, 0]$ par cette symétrie. (en vert)