Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L3 Mathématiques Appliquées 2023-2024

NOM : ....

PRÉNOM : ....
(lisiblement)

Calcul Différentiel et Optimisation (partie II).
Partiel du 31 octobre 2023 (durée 1h30).

L'examen se compose d'un problème (en trois parties) et de trois exercices. Il est probablement un peu long, mais le barème en tiendra compte, il n'est pas nécessaire de tout avoir fait pour obtenir la note maximale.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficaces, et n'utilisez les dernières feuilles blanches qu'en cas d'extrême nécessité.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur : N° copie :

Commentaires éventuels :

PARTIE
À
RABATTRE

Problème : autour du théorème des accroissements finis.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème des accroissement finis pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque. On commence par en démontrer une variante pour des fonctions continues, avec une hypothèse un peu plus faible que la dérivabilité.
On rappelle la définition de la limite inférieure à droite pour une fonction h de $[0, \delta[$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\delta > 0$) :

$$\liminf_{\tau \to 0^+} h(\tau) = \lim_{\tau \to 0^+} \inf_{u \in]0,\tau]} h(u).$$

I. Une variante continue. Soit F un espace vectoriel normé et g une fonction continue de $[0,1]$ dans F. On suppose qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\liminf_{\tau \to 0^+} \frac{1}{\tau} \|g(t+\tau) - g(t)\| \leqslant K.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\varphi(t) = \|g(t) - g(0)\| - (K+\varepsilon)t$. Montrer que φ atteint son minimum sur $[0,1]$ (en un point que l'on notera t_0).

Supposons que $t_0 < 1$. Montrer qu'il existe $s \in]t_0, 1]$ tel que $\|g(s) - g(t_0)\| < (K+\varepsilon)(s - t_0)$.

En déduire que $\varphi(t_0) > \varphi(s)$ et obtenir une contradiction.

En déduire que l'on a $\|g(1) - g(0)\| \leqslant (K+\varepsilon)$. Et enfin que $\|g(1) - g(0)\| \leqslant K$.

II. Application. Soit U un ouvert de E (e.v.n.), et f différentiable sur U à valeurs dans F.

Sans utiliser la partie **I**, montrer que si f est Lipschitzienne, alors sa différentielle est bornée (pour la norme opérateur).

Déduire de la partie **I** (et énoncer proprement) l'inégalité des accroissements finis pour f entre des points a et b de E tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U.

Si U est convexe, montrer que la réciproque de la première question est vraie : si la différentielle est bornée sur U, alors f est Lipschitzienne.

III. Un contrexemple. Soit $U = (]-3,-1[\times]0,+\infty[) \cup (]-3,3[\times]0,2[) \cup (]1,3[\times]0,+\infty[)$.
On définit $f : U \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = y\arctan(xy)$.

Faire un dessin (propre) de U et justifier que U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$.

Montrer que la différentielle de f est bornée sur U.

La fonction f est elle Lipschitzienne sur U ?

Exercice 1. Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Trouver l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2$.

On pourra poser $U(x,y) = xy$, $V(x,y) = \frac{x}{y}$, et montrer que toute solution peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = g(U(x,y),V(x,y))$ avec $g : (u,v) \mapsto g(u,v)$ une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}(A^2)A^\top + \sin(\langle x, Ax\rangle)\mathrm{I}_n.$$

Montrer que Φ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 3. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \sqrt{2}\sin^2 t, \\ y(t) = \sin(2t). \end{cases}$

On considère la courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$.

Étudier (soigneusement) les variations de x et y sur $[0, \pi]$.

Calculer $\gamma'(\frac{\pi}{2})$. En déduire la pente de la tangente à la courbe au point $\gamma(\frac{\pi}{2})$.

Calculer $\gamma''(\frac{3\pi}{4})$. En déduire un développement limité de γ à l'ordre 2 en $t = \frac{3\pi}{4}$, puis la pente des demi-tangentes à la courbe au point $\gamma(\frac{3\pi}{4})$ (et le point où la demi-tangente coupe l'axe des abscisses).

Tracer soigneusement l'image de la courbe sur $[0, \pi]$ au vu des questions précédentes, puis sur $[-\pi, 0]$ (en expliquant pourquoi).