PARTIE
À
RABATTRE

Partie I : Notions Fondamentales.

Cette partie sera notée sur 5 points, sa rédaction ne doit normalement pas excéder 30 minutes.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de $A-2I_4$ et la trace de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \\ -2 & -4 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. Toutes les colonnes sont colinéaires donc I_4 est de rang 1. $\underline{Tr(A) = 3}$

Donc $E_2 = Ker(A-2I_4)$ est de dimension 3. Donc 2 est racine de χ_A de multiplicité au moins 3. Donc $(X-2)^3$ divise χ_A, qui est scindé (dans $\mathbb{R}$). La somme des racines vaut 3, donc la dernière racine est $\lambda = Tr(A) - 3\times 2 = -3$. (c'est une valeur propre simple)

$\left.\begin{matrix} \dim E_2 = 3 \\ \dim E_{-3} = 1 \end{matrix}\right\}$ Donc A diagonalisable

2. Soient E, F, et I des ensembles, $f : E \to F$ une application.

Si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de F, montrer que $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Soit $x \in E$. On a

$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \iff \forall i \in I, f(x) \in B_i \iff \forall i\in I, x \in f^{-1}(B_i)$
$\iff x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de E, que peut-on dire de $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$?

Si $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$.
comme $\forall i \in I$, $x \in A_i$ alors $\forall i \in I, y \in f(A_i)$. Donc $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
Donc $\underline{f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)}$.
L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie : prendre $A_0 = \{0\}$ $A_1 = \{1\}$ et $f(0) = f(1) = 1$
(on a alors $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$ et $f(A_0) \cap f(A_1) = \{1\}$).

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

Comme $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2n+1} = +\infty$ (critère de Riemann par exemple), alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$, calculer $\int_0^x s^{2n}\,\mathrm{d}s$ et en déduire une expression de $\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.

$\int_0^x s^{2n}\,ds = \left[\dfrac{s^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Donc $\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^x (-1)^n s^{2n}\,ds$.

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{N} (-s^2)^n\right) ds = \int_0^x \underbrace{\frac{1-(-s^2)^{N+1}}{1-(-s^2)}}_{(\text{pour } s\in[0,1[)} ds = \int_0^x \frac{1}{1+s^2}ds + (-1)^N \int_0^x \frac{s^{2N+2}}{1+s^2}ds$$

$$= \arctan(x) + (-1)^N \int_0^x \frac{s^{2N+2}}{1+s^2}\,ds.$$

Montrer que pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{s^{2N+2}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2N+3}$.

On a $\displaystyle\int_0^x \frac{s^{2N+2}}{1+s^2}\,ds \leq \int_0^1 s^{2N+2}\,ds = \frac{1}{2N+3}$.

En déduire que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

On a $\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x) - \arctan x\right| = \left|(-1)^N \int_0^x \dfrac{s^{2N+2}}{1+s^2}ds\right| \leq \dfrac{1}{2N+3}$

Donc $\left\|\sum_{n=0}^{N} f_n - \arctan\right\|_\infty \leq \dfrac{1}{2N+3} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Donc $\sum_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers arctan.

Partie II : Calcul Différentiel et Optimisation

Cette partie sera notée sur 15 points. Il y a deux exercices, un problème, et enfin un troisième exercice.

Exercice 1. Optimisation de $x^2 + 7y^2$ sous contrainte $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2 + 7y^2$ et $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$. On définit $\mathcal{K} = g^{-1}(\{0\})$. Montrer que f atteint ses bornes sur $\mathcal{K}$.

g et f sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Donc $K = g^{-1}(\{0\})$ est fermé.

On a $g(x,y) \geq (x^2)^2 - x^2$ (car $y^2 \geq 0$)

$= x^2(x^2-1)$.

Donc si $|x| > 1$, alors $g(x,y) > 0$. ~~Donc~~

Et si $|y| > 1$ et $|x| \leq 1$, alors $g(x,y) \geq -x^2+y^2 \geq y^2-1 > 0$.

Donc si $g(x,y) = 0$, alors $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Donc K est borné.

Donc f est continue sur K (compact), donc atteint ses bornes sur K.

Calculer le gradient de g. Quels sont les points de $\mathcal{K}$ où l'on ne peut pas a priori appliquer le théorème des extrema liés ?

On a $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \times 2(x^2+y^2) - 2x \\ 2y \times 2(x^2+y^2) + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(x^2+y^2-2) \\ 2y(\underbrace{x^2+y^2+2}_{>0}) \end{pmatrix}$.

Donc $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x^2-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \\ y = 0 \end{cases}$

$(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$ ne sont pas sur K. $(0,0) \in K$.

Donc en tout point (x,y) de $K \setminus \{(0,0)\}$, on a $\nabla g(x,y) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. donc $dg_{(x,y)}$ est de rang 1 (surjective) et la contrainte est qualifiée. Le seul point où ce n'est pas le cas est $(0,0)$.

Écrire les conditions de Lagrange en un point d'extremum local de f sur $\mathcal{K}$ qui permet d'appliquer le théorème des extrema liés, et montrer que 6 points de $\mathcal{K}$ satisfont ces conditions.

Si (x,y) est un extremum local de f sur K avec $(x,y) \neq (0,0)$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_{(x,y)} = \lambda\, dg_{(x,y)}$. (ie $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$)

Donc

$$(*) \begin{cases} 2x = 2\lambda x (2(x^2+y^2) - 1) \\ 14y = 2\lambda y (2(x^2+y^2) + 1) \\ (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Soit (x,y) une solution de $(*)$. ~~Donc comme~~ si $x=0$, on a $(y^2)^2 = -y^2$, donc $y=0$ ce qui est exclus.

Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$, toute solution vérifie $x \neq 0$.

Donc $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda(2(x^2+y^2)-1) \\ 7y = \lambda y(2(x^2+y^2)+1) \\ (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \text{ et } \frac{1}{\lambda} = x^2+y^2-2 \\ 7y(2(x^2+y^2)-1) = y(2(x^2+y^2)+1) \\ (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \text{ et } 1/\lambda = x^2+y^2-2 \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad 12(x^2+y^2) = 8 \\ (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^4 = x^2 \\ (1/\lambda = x^2+y^2-2) \\ (\lambda \neq 0,\ x \neq 0) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+y^2 = 2/3 = 6/9 \\ x^2-y^2 = (2/3)^2 = 4/9 \\ (1/\lambda = x^2+y^2-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (\pm 1, 0) \\ (\lambda = -1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = 5/9,\ y^2 = 1/9 \\ \left(\lambda = \frac{1}{2/3 - 2} = -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$

Les conditions sont donc réalisées aux points

$(1,0)$ $(-1,0)$ $\left(\frac{\sqrt5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{-\sqrt5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{\sqrt5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ et $\left(\frac{-\sqrt5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

Calculer la valeur de f en ces points. Quels sont les points de minimum et de maximum global de f sur $\mathcal{K}$?

On a $f(1,0) = f(-1,0) = \boxed{1}$ Aux 4 autres points, on a

$f(x,y) = 5/9 + 7 \times 1/9 = \boxed{4/3}$.

Les points de min et max global de f sur K sont soit en ces points (comme extrema locaux de f sur $K \setminus \{(0,0)\}$), soit au point $(0,0)$ (où on ne peut pas appliquer le théorème des extrema liés a priori).

Comme $\boxed{f(0,0) = 0.}$ le min de f est atteint en $(0,0)$ uniquement.

Le max de f vaut $4/3$ et est atteint aux 4 points $\left(\frac{\pm\sqrt5}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 2. Étude d'une courbe paramétrée (la lemniscate de Bernoulli).

On considère la courbe paramétrée $x(t) = \frac{t+t^3}{1+t^4}$, $y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^4}$, pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $x(-t)$, $y(-t)$, $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$. En déduire les symétries qui permettent de se ramener à étudier la courbe pour $t \in [0,1]$.

On a $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$. L'image de la courbe pour $t \in]-\infty, 0]$ se déduit donc de celle sur $[0, +\infty[$ par une symétrie centrale par rapport à l'origine.

(pour $t \neq 0$)
On a $x(1/t) = \dfrac{1/t + \frac{1}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^4}} = \dfrac{t^3+t}{t^4+1} = x(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = \dfrac{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^4}} = \dfrac{t^3 - t}{t^4+1} = -y(t)$.

L'ensemble $\{x(t), y(t), t \in [1, +\infty[\} = \{x(1/t), y(1/t), t \in]0,1]\} = \{(x(t), -y(t)), t \in]0,1]\}$ est donc le symétrique de l'image de la courbe pour $t \in]0,1]$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Dresser les tableaux de variation de x et y sur $[0,1]$, donner les points où les tangentes sont horizontales, verticales, et donner la pente de la courbe en $t = 0$ (*Indication :* on pourra admettre que la seule racine de $t^6 - 3t^4 - 3t^2 + 1$ dans $[0,1]$ est $t_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$).

x et y sont $\mathcal{C}^\infty$. $x'(t) = \dfrac{(1+3t^2)(1+t^4) - (t+t^3) \times 4t^3}{(1+t^4)^2} = \dfrac{-t^6 - 3t^4 + 3t^2 + 1}{(1+t^4)^2}$

$= \dfrac{(1-t^2)(t^4 + 4t^2 + 1)}{(1+t^4)^2} \geq 0$ si $t \in [0,1]$

$x'(0) = 1$. (s'annule seulement en 1).

$y'(t) = \dfrac{(1-3t^2)(1+t^4) - (t-t^3) \times 4t^3}{(1+t^4)^2}$

$= \dfrac{t^6 - 3t^4 + 3t^2 + 1}{(1+t^4)^2} = \dfrac{(t^2+1)(t^4 - 4t^2 + 1)}{(1+t^4)^2} = \dfrac{(t^2+1)((t^2-2)^2 - 3)}{(1+t^4)^2}$

s'annule lorsque $t^2 - 2 = \pm\sqrt{3}$ ie $t = \sqrt{\pm 2 \pm \sqrt{3}}$.

Seule solution sur $[0,1]$: $t^2 = 2 - \sqrt{3}$ $t = t_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

$y'(0) = 1$. $\boxed{\text{La pente en } 0 \text{ est } \frac{y'(0)}{x'(0)} = 1}$ (on a bien $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$)

Tangente horizontale en $(x(t_0), y(t_0))$. On a $t_0^4 - 4t_0^2 + 1 = 0$

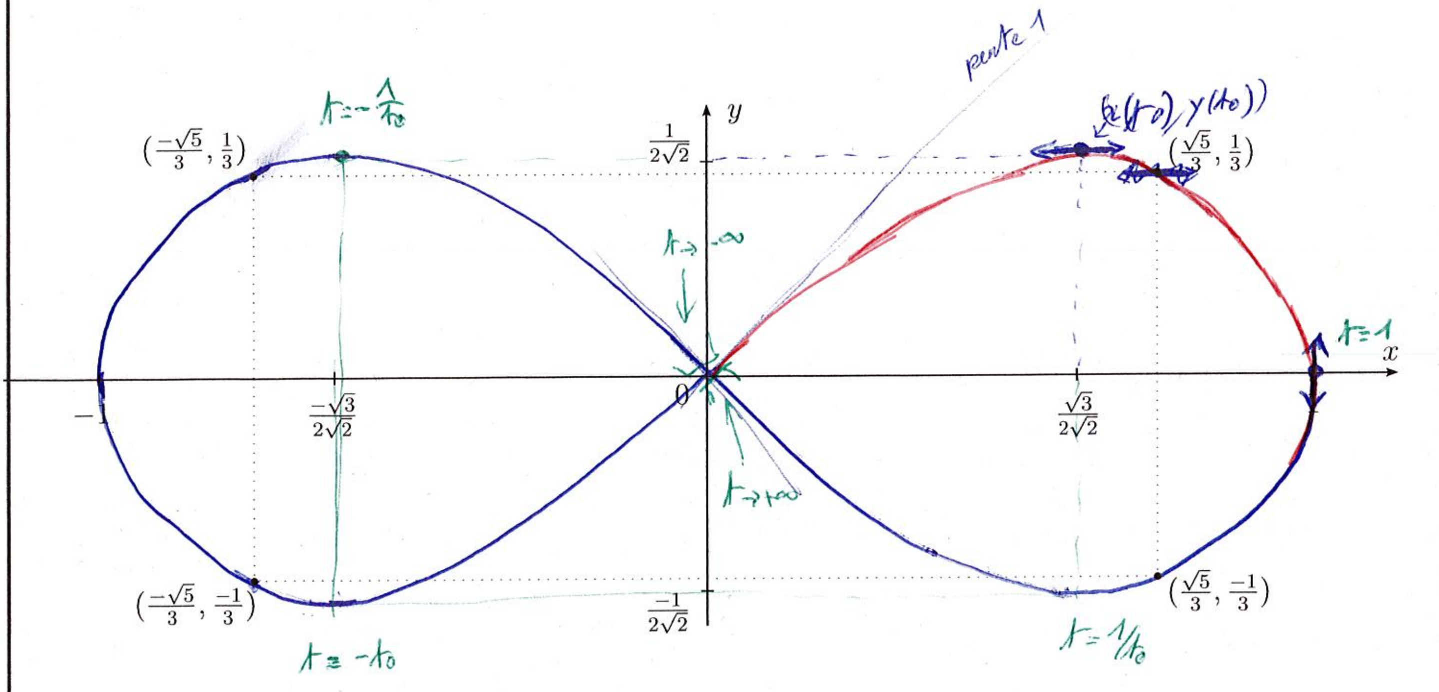
$y(t_0) = \dfrac{t_0(1 - t_0^2)}{4(2 - \sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} \times \dfrac{(1 - (2-\sqrt{3}))}{4(2-\sqrt{3})} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\, 4(2-\sqrt{3})} = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$ Donc $t_0^4 + 1 = 4t_0^2 = 4(2 - \sqrt{3})$.

$x(t_0) = \dfrac{t_0(1 + t_0^2)}{4(2-\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2}\, 4(2-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{2}\, 4(2-\sqrt{3})} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

Tangente verticale en $(x(1), y(1)) = \boxed{(1, 0)}$

t	0		t_0		1
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

Tracer soigneusement l'image de la courbe paramétrée lorsque $t \in \mathbb{R}$ (quatre points ont déjà été tracés, correspondant à $t = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$).



Problème : autour du Lemme de Morse.

Introduction. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, avec $f(0) = 0$ et $\nabla f(0) = u_0 \neq 0$, on veut montrer qu'il existe un difféomorphisme local α au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(0) = 0$, dont la différentielle en 0 est l'identité, et tel que pour tout x dans un voisinage de 0, $f(x) = \langle \alpha(x), u_0 \rangle$.

Montrer que $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\alpha(x) = x + \frac{1}{\|u_0\|^2}(f(x) - \langle x, u_0 \rangle)u_0$ convient.

α est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par composition, puisque f l'est (et u_0 fixé $\in \mathbb{R}^n$).

On a bien $\boxed{\langle \alpha(x), u_0 \rangle = \langle x, u_0 \rangle - (f(x) - \langle x, u_0 \rangle) = f(x)}$ et $\boxed{\alpha(0) = 0}$ (car $f(0) = 0$).

Enfin $d\alpha_x(h) = h + \frac{1}{\|u_0\|^2}\left(\underbrace{df_x(h)}_{= \langle \nabla f(x), h \rangle} - \langle h, u_0 \rangle\right)u_0$.

Donc $d\alpha_0(h) = h$ puisque $\nabla f(0) = u_0$.

Donc $\boxed{d\alpha_0 = id_{\mathbb{R}^n}}$, qui est inversible. Donc par le théorème d'inversion locale, α est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

En faisant le « changement de variable » $y = \alpha(x)$ au voisinage de 0, on a donc exprimé f comme $\langle y, u_0 \rangle$, qui correspond à la partie linéaire du développement de Taylor de f pour la variable x, puisque $u_0 = \nabla f(0)$.

Le Lemme de Morse consiste à aller à l'ordre supérieur au voisinage d'un point critique.

On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^3, on note $\mathrm{Hess}_f : \mathbb{R}^n \to S_n(\mathbb{R})$ sa hessienne. On suppose que $f(0) = 0$, que $\nabla f(0) = 0$, et que $\mathrm{Hess}_f(0) = H_0$ est inversible. On veut montrer le résultat suivant :

> Il existe un difféomorphisme local α au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que
>
> $$\begin{cases} \alpha \text{ est de classe } C^1 \text{ et } \alpha(0) = 0, \\ \text{la différentielle de } \alpha \text{ en } \ 0 \text{ est l'identité,} \\ \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0, \ f(x) = \frac{1}{2}\langle \alpha(x), H_0\,\alpha(x)\rangle. \end{cases}$$

On aura donc bien transformé f en une forme quadratique en la nouvelle variable $y = \alpha(x)$.

A. Un résultat sur les matrices symétriques. Si A_0 est symétrique et inversible, on veut construire une application r de classe C^1 dans un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques), à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $r(A_0) = I_n$, et vérifiant $r(A)^\top A_0\, r(A) = A$ pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{V}$.

On pose $\Phi : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ donnée par $\Phi(P) = PA_0^{-1}P$. Montrer que Φ est un difféomorphisme local d'un voisinage $\mathcal{U} \subset S_n(\mathbb{R})$ de A_0 dans un voisinage $\mathcal{V} \subset S_n(\mathbb{R})$ de A_0.

On a Φ de classe $\mathcal{C}^1$ et $d\Phi_P(H) = PA_0^{-1}H + HA_0^{-1}P$ (produit).

Donc $d\Phi_{A_0}(H) = 2H$. $d\Phi_{A_0} = 2\,\mathrm{id}$ est donc inversible et par le théorème d'inversion locale ($S_n(\mathbb{R})$ est un e.v. de dim finie, donc un Banach) Φ est un difféomorphisme local entre ~~voisinages de~~ un voisinage U (ouvert) de A_0 et un voisinage $\mathcal{V}$ de $\underline{\Phi(A_0) = A_0 A_0^{-1} A_0 = A_0}$.
(ouvert)

Pour $A \in \mathcal{V}$, on pose $r(A) = A_0^{-1}\,\Phi^{-1}(A)$. Montrer que r convient.

On a $r(A)^\top A_0\, r(A) = \Phi^{-1}(A) A_0^{-1} A_0 A_0^{-1} \Phi^{-1}(A)$ (car $\Phi^{-1}(A)$ et A_0^{-1} symétriques)
(pour $A \in \mathcal{V}$) $= \Phi^{-1}(A) A_0^{-1} \Phi^{-1}(A) = \Phi(\Phi^{-1}(A)) = A$.

et r est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{V} \subset S_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ car Φ^{-1} l'est (sur $\mathcal{V}$).

On a ~~$dr_A(H) = A_0^{-1} \cdot d\Phi^{-1}_A(H) = A_0^{-1}\left(d\Phi_{\Phi^{-1}(A)}\right)^{-1}(H)$~~ | ~~Donc $dr_{A_0}(H) = A_0^{-1}$~~

$\boxed{r(A_0)} = A_0^{-1}\Phi^{-1}(A_0) = A_0^{-1}A_0 = \boxed{I_n}$. (car $\Phi(A_0) = A_0$ donc $\Phi^{-1}(A_0) = A_0$)

B. Démonstration du Lemme de Morse. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on note $A(x) = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}_f(tx)\,dt$: on a $A_{i,j}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)\,dt$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Montrer que si $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 t(1-t) \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(tx)\,dt$, et que A est de classe C^1.

On fixe les variables autres que x_k et on écrit $g(t, x_k) = (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)$.

On a donc $A_{ij}(x) = \int_0^1 g(t, x_k)\,dt$. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition,

et ~~g et~~ $\frac{\partial g}{\partial x_k}$ sont uniformément bornées pour $(t, x_k) \in [0,1] \times [-M, M]$ par exemple.

On peut donc utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale.

A_{ij} a donc une dérivée partielle par rapport à x_k donnée par $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_k}(t, x_k)\,dt$

On a bien la formule demandée (par composition) (puisque f est $\mathcal{C}^3$)

De même comme $(t, x) \mapsto t(1-t) \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(tx)$ est continue (et uniformément bornée sur les compacts), par continuité sous l'intégrale, $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$ est continue.

$\boxed{\text{Les dérivées partielles de } A \text{ existent et sont continues donc } A \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$

Exprimer $f(x)$ par un développement de Taylor en 0 à l'ordre 2 en faisant apparaître $A(x)$.

On a, comme f est $\mathcal{C}^3$ (donc $\mathcal{C}^2$). (et que $\mathbb{R}^n$ est convexe !)

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \langle \underbrace{\nabla f(0)}_{=0}, x \rangle + \int_0^1 (1-t)\, \underbrace{d^2_{(tx)} f(x, x)}_{= \langle x, \mathrm{Hess}_f(tx) x \rangle}\,dt$$

Donc $\boxed{f(x) = \langle x, A(x) x \rangle}$

On pose $A_0 = A(0)$. Montrer qu'on peut appliquer le résultat de la partie **A.**, et qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0 tel que $A(\Omega) \subset \mathcal{V}$.

Par hypothèse on a $\boxed{A_0 = \int_0^1 (1-t)\mathrm{Hess}_f(0)\,dt = \frac{1}{2} H_0}$ inversible.

Comme A est $\mathcal{C}^1$ donc continue et $\mathcal{V}$ ouvert, on peut prendre $\Omega = A^{-1}(\mathcal{V})$ qui est ouvert. Donc $\forall x \in \Omega$, $A(x) \in \mathcal{V}$. $A(\Omega) \subset \mathcal{V}$.

et comme $A(0) = A_0 \in \mathcal{V}$, on a $\boxed{0 \in A^{-1}(\mathcal{V}) = \Omega}$

Pour $x \in \Omega$, on pose $\alpha(x) = r(A(x))x$. Montrer que α convient.

α est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω par composition et produit (r et A sont $\mathcal{C}^1$)

$\alpha(0) = r(A_0) \times 0 = 0$. $d\alpha_x(h) = dr_{A(x)}(dA_x(h)) \times x + r(A(x)) \times h$.

Donc $d\alpha_0(h) = dr_{A(0)}(dA_0(h)) \times 0 + r(A_0) \times h = h$. $(r(A_0) = I_n)$.

Donc $\boxed{d\alpha_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}}$.

et si $x \in \Omega$ $\boxed{\frac{1}{2}\langle \alpha(x), H_0 \alpha(x) \rangle = \langle \alpha(x), A_0 \alpha(x) \rangle = \langle r(A(x))x, A_0 r(A(x)) x \rangle = \langle x, \underbrace{r(\underbrace{A(x)}_{\in \mathcal{V}})^T A_0 r(\underbrace{A(x)}_{\in \mathcal{V}})}_{= A(x)} x \rangle = \langle x, A(x) x \rangle = f(x)}$

C. Application : éclatement de singularité. On suppose que f est de classe C^3 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et vérifie $f(x,y) = -x^2 + y^2 + O(\|(x,y)\|^3)$ au voisinage de $(0,0)$

Que valent $f(0,0)$, $\nabla f(0,0)$ et $\mathrm{Hess}_f(0,0)$?

On a $f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), \binom{x}{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \binom{x}{y}, \mathrm{Hess}_f(0,0) \times \binom{x}{y} \rangle + O(\|(x,y)\|^3)$

On (Développement de Taylor à l'ordre 2, f est $\mathcal{C}^3$).

$= -x^2 + y^2 + O(\|(x,y)\|^3)$.

On peut donc identifier les termes des développements.
(constants, linéaires, quadratiques)

$\boxed{f(0,0) = 0}$ $\boxed{\nabla f(0,0) = 0}$ et $\frac{1}{2} \langle \binom{x}{y}, \mathrm{Hess}_f(0,0) \binom{x}{y} \rangle = -x^2 + y^2$ $\boxed{\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

En utilisant la partie **B.**, Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et des fonctions u et v de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x,y) = -u(x,y)^2 + v(x,y)^2$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, et avec $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$.

On note α le difféomorphisme local de la partie B. (on a $\mathrm{Hess}_f(0,0)$ inversible).

on note $\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, donc pour $\binom{x}{y} \in \Omega$, on a

$f(x,y) = \frac{1}{2} \langle \alpha(x,y), \mathrm{Hess} \times \alpha(x,y) \rangle = \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \rangle$

$= -u(x,y)^2 + v(x,y)^2$.

La jacobienne de α est I_2 (en $(0,0)$) $= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ (en $(0,0)$) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

ce qui donne les valeurs demandées.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions φ et ψ de $C^1(]-\varepsilon,\varepsilon[,\mathbb{R})$, avec $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\psi'(0) = -1$ telles que $\forall (x,y) \in]-\varepsilon,\varepsilon[^2$

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \text{ ou } y = \psi(x).$$

On a pour $(x,y) \in \Omega$, $f(x,y) = v(x,y)^2 - u(x,y)^2 = (v-u)(v+u)$ (en (x,y)).

Donc $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underbrace{v(x,y) - u(x,y)}_{g(x,y)} = 0}$ ou $\boxed{\underbrace{v(x,y) + u(x,y)}_{h(x,y)} = 0}$

$= g(0,0)$ $= h(0,0)$

Car $\alpha(0,0) = (0,0)$

g et h sont $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

de plus $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ $0 - 1 = -1$

D'après le théorème des fonctions implicites il existe $\varepsilon > 0$ tel que

φ $\mathcal{C}^1(]-\varepsilon,\varepsilon[, \mathbb{R})$.

$\forall (x,y) \in]-\varepsilon,\varepsilon[^2$ $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. de plus $\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)} = \frac{-(-1)}{1} \boxed{= 1}$

(donc $\varphi(0) = 0$)

On fait de même pour h puisque $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1$.

On a $\forall (x,y) \in]-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}[$, $h(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x)$ avec $\tilde{\varepsilon} > 0$, ψ $\mathcal{C}^1$ et $\psi'(0) = \frac{-1}{1} \boxed{= -1}$

$\psi(0) = 0$

Voici maintenant le troisième exercice.

Exercice 3. Autour de l'unicité d'un point critique (point où la différentielle s'annule).

En dimension 1, montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, admet un minimum local strict en x, qui est le seul point critique, alors c'est un point de minimum global (strict).

Si x_0 est le min local, on a $f'(x_0) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$.

pour h petit, on a $f(x_0+h) > f(x_0)$ (donc f' ne change pas de signe sur $]-\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$ sinon par le TVI il y aurait un autre point critique).

Donc $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c) > 0.$ pour $c \in]x_0, x_0+h[$

Donc f' est > 0 sur $]x_0, +\infty[$

(de même $\frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} = f'(\tilde{c}) < 0$ pour $c \in]x_0-h, x_0[$)

Donc f' est < 0 sur $]-\infty, x_0[$. f est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0[$ puis strict. $\nearrow$ sur $]x_0, +\infty[$

Donc x_0 est un min global.

Montrer que $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^2 \in \mathbb{R}$ a un seul point critique, que c'est un point de minimum local strict, mais qui n'est pas global.

f est $\mathcal{C}^2$. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(1+y)^3 \\ 3x^2(1+y)^2 + 2y \end{pmatrix}$

si $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors
- Soit $x = 0$ et alors $3 \times 0 (1+y)^2 + 2y = 0$ donc $y = 0$
- Soit $(1+y)^3 = 0$, $y = -1$ puis $2y = 0$ contradiction

le seul point critique est $(0,0)$.

La hessienne en $(0,0)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, définie positive, donc $(0,0)$ est un min local strict.

Mais on a $f(3,-2) = -9 + 4 = -5 < f(0,0)$.

$(0,0)$ n'est pas min global.

Existe-t-il une fonction g : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et bornée inférieurement, ayant un unique point critique, qui soit un minimum local strict, mais que la fonction g n'admette pas de minimum global ?

Oui, il suffit de prendre par exemple $g(x,y) = \exp(f(x,y))$ avec f comme ci-dessus !

$\nabla g(x,y) = \exp(f(x,y)) \nabla f(x,y)$: mêmes pts critiques.

exp strict $\nearrow$: mêmes pts de min local / global.