Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L3 Mathématiques Appliquées 2023-2024

NOM : ....

PRÉNOM : ....
(lisiblement)

Calcul Différentiel et Optimisation.
Examen du 8 janvier 2024 (durée 2h30).

L'examen se compose d'une première partie de 30 min (exercices de type « Tests »), puis d'une deuxième partie de Calcul Différentiel (2h), qui comprend trois exercices et un problème. Pour des raisons de mise en page, le troisième exercice (probablement le plus facile et le plus court) est énoncé après le problème.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficaces, et n'utilisez la dernière feuille qu'en cas d'extrême nécessité !

Réservé pour la correction. Initiales correcteur : N° copie :

Commentaires éventuels :

PARTIE
À
RABATTRE

Partie I : Notions Fondamentales.

Cette partie sera notée sur 5 points, sa rédaction ne doit normalement pas excéder 30 minutes.

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de $A-2I_4$ et la trace de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soient E, F, et I des ensembles, $f : E \to F$ une application.

Si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de F, montrer que $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de E, que peut-on dire de $f\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big)$ et $\bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

Pour $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\int_0^x s^{2n}\,\mathrm{d}s$ et en déduire une expression de $\sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x)$.

Montrer que pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{s^{2N+2}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2N+3}$.

En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

Partie II : Calcul Différentiel et Optimisation

Cette partie sera notée sur 15 points. Il y a deux exercices, un problème, et enfin un troisième exercice.

Exercice 1. Optimisation de $x^2 + 7y^2$ sous contrainte $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2+7y^2$ et $g(x, y) = (x^2+y^2)^2-x^2+y^2$. On définit $\mathcal{K} = g^{-1}(\{0\})$. Montrer que f atteint ses bornes sur $\mathcal{K}$.

Calculer le gradient de g, et montrer qu'il est non-nul en tout point de $\mathcal{K} \setminus \{(0, 0)\}$.

En un point d'extremum local de f sur $\mathcal{K} \setminus \{(0, 0)\}$, montrer que l'on peut appliquer le théorème des extrema liés. Montrer que les équations correspondantes sont satisfaites en 6 points de $\mathcal{K} \setminus \{(0, 0)\}$.

Calculer la valeur de f en ces points. Quels sont les points de minimum et de maximum de f sur $\mathcal{K}$?

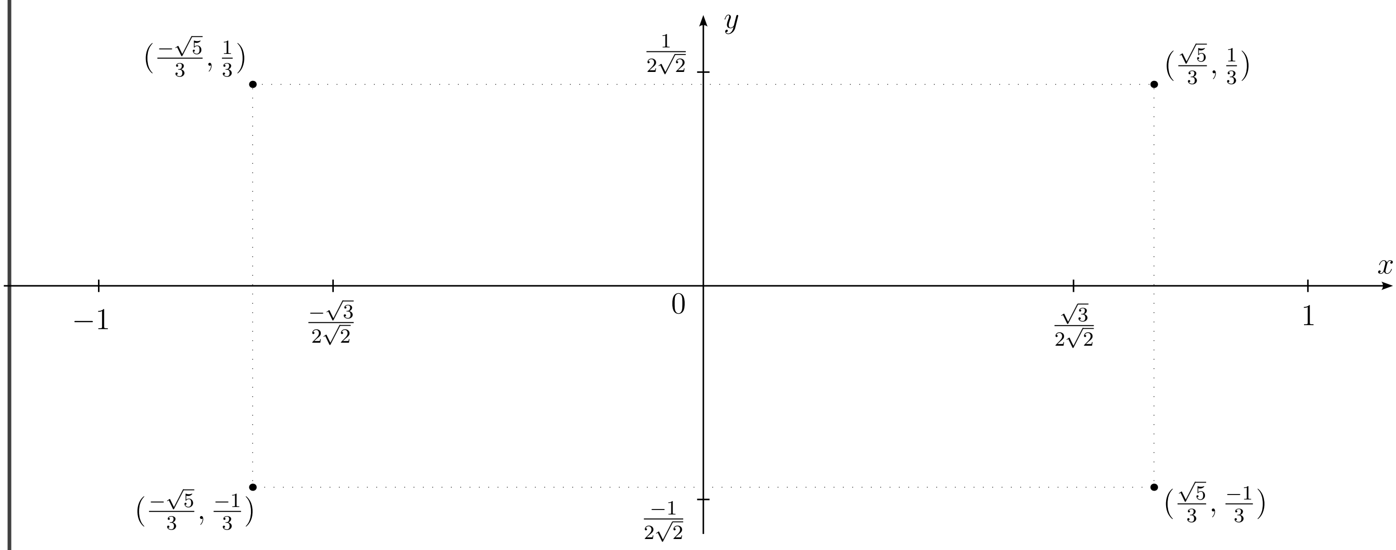
Exercice 2. Étude d'une courbe paramétrée (la lemniscate de Bernoulli).

On pose $(x(t), y(t)) = (\frac{t+t^3}{1+t^4}, \frac{t-t^3}{1+t^4})$, pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $x(-t)$, $y(-t)$, $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$. En déduire les symétries qui permettent de se ramener à étudier la courbe paramétrée pour $t \in [0,1]$ seulement.

Dresser les tableaux de variation de x et y sur $[0,1]$, donner les points où les tangentes sont horizontales, verticales, et donner la pente de la courbe en $t = 0$.

Indication : on pourra admettre que la seule racine de $t^6 - 3t^4 - 3t^2 + 1$ *dans* $[0,1]$ *est* $t_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Tracer soigneusement l'image de la courbe paramétrée lorsque $t \in \mathbb{R}$ (quatre points ont déjà été tracés, correspondant à $t = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$).



Problème : autour du Lemme de Morse.

Introduction. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, avec $f(0) = 0$ et $\nabla f(0) = u_0 \neq 0$, on veut montrer qu'il existe un difféomorphisme local α au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(0) = 0$, dont la différentielle en 0 est l'identité, et tel que pour tout x dans un voisinage de 0, $f(x) = \langle \alpha(x), u_0 \rangle$.

Montrer que $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par $\alpha(x) = x + \frac{1}{\|u_0\|^2}(f(x) - \langle x, u_0 \rangle)u_0$ convient.

En faisant le « changement de variable » $y = \alpha(x)$ au voisinage de 0, on a donc exprimé f comme $\langle y, u_0 \rangle$, qui correspond à la partie linéaire du développement de Taylor de f pour la variable x, puisque $u_0 = \nabla f(0)$.

Le Lemme de Morse consiste à aller à l'ordre supérieur au voisinage d'un point critique.

On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^3, on note $\mathrm{Hess}_f : \mathbb{R}^n \to S_n(\mathbb{R})$ sa hessienne. On suppose que $f(0) = 0$, que $\nabla f(0) = 0$, et que $\mathrm{Hess}_f(0) = H_0$ est inversible. On veut montrer le résultat suivant :

Il existe un difféomorphisme local α au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \text{ est de classe } C^1 \text{ et } \alpha(0) = 0, \\ \text{la différentielle de } \alpha \text{ en } \ 0 \text{ est l'identité,} \\ \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } 0, \ f(x) = \frac{1}{2}\langle \alpha(x), H_0\, \alpha(x) \rangle. \end{cases}$$

On aura donc bien transformé f en une forme quadratique en la nouvelle variable $y = \alpha(x)$.

A. Un résultat sur les matrices symétriques. Si A_0 est symétrique et inversible, on veut construire une application r de classe C^1 dans un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques), à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ avec $r(A_0) = I_n$, et vérifiant $r(A)^\top A_0\, r(A) = A$ pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{V}$.

On pose $\Phi : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ donnée par $\Phi(P) = PA_0^{-1}P$. Montrer que Φ est un difféomorphisme local d'un voisinage $\mathcal{U} \subset S_n(\mathbb{R})$ de A_0 dans un voisinage $\mathcal{V} \subset S_n(\mathbb{R})$ de A_0.

Pour $A \in \mathcal{V}$, on pose $r(A) = A_0^{-1}\, \Phi^{-1}(A)$. Montrer que r convient.

B. Démonstration du Lemme de Morse. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on note $A(x) = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{Hess}_f(tx)\,\mathrm{d}t$: on a $A_{i,j}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx)\,\mathrm{d}t$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Montrer que si $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 t(1-t) \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(tx)\,\mathrm{d}t$, et que A est de classe C^1.

Exprimer $f(x)$ par un développement de Taylor en 0 à l'ordre 2 en faisant apparaître $A(x)$.

On pose $A_0 = A(0)$. Montrer qu'on peut appliquer le résultat de la partie **A.**, et qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0 tel que $A(\Omega) \subset \mathcal{V}$.

Pour $x \in \Omega$, on pose $\alpha(x) = r(A(x))x$. Montrer que α convient.

C. Application : éclatement de singularité. On suppose que f est de classe C^3 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et vérifie $f(x,y) = -x^2 + y^2 + O(\|(x,y)\|^3)$ au voisinage de $(0,0)$

Que valent $f(0,0)$, $\nabla f(0,0)$ et $\mathrm{Hess}_f(0,0)$?

En utilisant la partie **B.**, Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et des fonctions u et v de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x,y) = -u(x,y)^2 + v(x,y)^2$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, et avec $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions φ et ψ de $C^1(]-\varepsilon,\varepsilon[,\mathbb{R})$, avec $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\psi'(0) = -1$ telles que $\forall (x,y) \in]-\varepsilon,\varepsilon[^2$, $[f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ ou $y = \psi(x)]$.

Voici maintenant le troisième exercice.

Exercice 3. Autour de l'unicité d'un point critique (point où la différentielle s'annule).

En dimension 1, montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, admet un minimum local strict en x, qui est le seul point critique, alors c'est un point de minimum global (strict).

Montrer que $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^2 \in \mathbb{R}$ a un seul point critique, que c'est un point de minimum local strict, mais qui n'est pas global.

Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et bornée inférieurement, ayant un unique point critique, qui soit un minimum local strict, mais que la fonction g n'admette pas de minimum global ?

Espace éventuel pour dépassement de cases.

Bonus (hors barème, mais cela peut vous aider à vérifier vos calculs)

Avez-vous vu le lien entre les exercices **1** et **2**, et également avec la partie **C.** du problème ?