Méthodes numériques (L2 - 2024/2025)
Feuille de TD n° 3 — Méthodes de résolution directe de systèmes linéaires.

Cette feuille est très largement extraite des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (jusqu'en 2024), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/methnum/`

1 Rappels sur la méthode d'élimination de Gauss

Exercice 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et de tous les seconds membres intermédiaires, le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Répondre à la même question avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère le système linéaire s'écrivant matriciellement $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Est-il possible d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss sans échange pour la résolution de ce système ?
2. Trouver des matrices de permutation P et Q telles que l'on puisse réaliser l'élimination sur la matrice PAQ. Comment est transformé le système linéaire initial ?

Exercice 3. Soit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer son inverse en résolvant le système matriciel $UX = I_4$, dans lequel X désigne une matrice carrée d'ordre 4, par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

Exercice 4. Donner une formulation matricielle (c'est-à-dire en termes d'un produit de matrices de transformations élémentaires) de la réduction à la forme échelonnée de la matrice rectangulaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 5. On considère le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss–Jordan, mettre le système sous une forme échelonnée réduite équivalente.
2. Préciser le rang et la dimension du noyau de la matrice obtenue et en déduire ceux de A.
3. Déterminer des bases de l'image et du noyau de la matrice A.
4. Quelle(s) condition(s) doit vérifier le vecteur colonne $\boldsymbol{b}$ pour que le système possède une solution ?

2 Méthodes de factorisation pour la résolution de systèmes linéaires

Exercice 6. On considére le système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente.
3. Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 7. Calculer la factorisation LU de la matrice A dans les cas suivants

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 3. $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$,

en précisant à chaque étape de la factorisation les matrices intervenant dans le procédé.

Exercice 8. $\diamond$ *(factorisation LU d'une matrice bande).*

On dit qu'une matrice est une matrice bande si elle n'admet que des éléments non nuls sur un « certain nombre » de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de largeur de bande valant $2p+1$ est telle qu'il existe un entier naturel p tel que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$. Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bandes au sens suivant : *soit A une matrice carrée d'ordre n admettant une factorisation LU, alors*

$$a_{ij} = 0 \textit{ pour } |i-j| > p \Rightarrow \; l_{ij} = 0 \textit{ pour } i-j > p \textit{ et } u_{ij} = 0 \textit{ pour } j-i > p.$$

Exercice 9. *(factorisation LU d'une matrice tridiagonale – algorithme de Thomas)*

Soit n un entier naturel strictement plus grand que 2 et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & d_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale d'ordre n.

1. Vérifier que si A admet une factorisation LU alors les matrices L et U sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que les coefficients u_i, $1 \leq i \leq n$, et l_j, $2 \leq j \leq n$, satisfont les relations

$$u_1 = a_1,\ l_i = \frac{d_i}{u_{i-1}},\ u_i = a_i - l_i c_{i-1},\ 2 \leq i \leq n.$$

3. Obtenir les formules découlant de l'utilisation de cette factorisation pour la résolution du système linéaire s'écrivant matriciellement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la matrice colonne $\boldsymbol{b}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ étant donnée.
4. Déterminer le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de ce système.

Exercice 10. *(factorisation LU d'une matrice à diagonale strictement dominante)*

Soit n un entier naturel supérieur à 2 et A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'une telle matrice est inversible et admet une factorisation LU.

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes est inversible.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que A admet une factorisation LU si et seulement si $A^\top$ admet une factorisation LU.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on suppose pouvoir partitionner en blocs de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & W^\top \\ \hline V & A_1 \end{array}\right),$$

   où $a = a_{11}$ est un réel non nul, V et W sont des matrice colonnes de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et A_1 est une matrice d'ordre $n-1$. En effectuant des produits par blocs, vérifier que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \frac{1}{a} V & I_{n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & W^\top \\ \hline \mathbf{0} & I_{n-1} \end{array}\right),\ \text{avec } B = A_1 - \frac{1}{a} V W^\top,$$

   où $\mathbf{0}$ désigne la matrice colonne nulle de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer alors que la matrice A admet une factorisation LU si c'est le cas pour le bloc B.
5. Dans cette question, on suppose que la matrice A est à diagonale strictement dominante par *colonnes*.
   (a) En utilisant la décomposition et les notations précédentes, montrer successivement que

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} |v_i| < |a| - |v_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} |(A_1)_{ij}| < |(A_1)_{jj}| - |w_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} |(A_1)_{ij}| + \frac{|w_j|}{|a|} \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} |v_i|,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

   En déduire que la matrice B est à diagonale strictement dominante par colonnes.
   (b) En raisonnant par récurrence, montrer que A admet alors une factorisation LU.

6. En supposant à présent que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes, déduire des questions précédentes qu'elle admet une factorisation LU.
7. On considère la matrice A dans les trois cas suivants :

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en justifiant très simplement la réponse, dans quel(s) cas A admet une factorisation LU et, le cas échéant, calculer sa factorisation en précisant à chaque étape les opérations effectuées sur les lignes de la matrice.

Exercice 11. *(existence et unicité de la factorisation de Cholesky)*

Soit n un entier naturel non nul. On rappelle qu'une matrice réelle A symétrique d'ordre n est dite *définie positive* si elle est telle que

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geq 0,\ \text{et } X^\top AX = 0 \Rightarrow X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Par ailleurs, on dit qu'une matrice A réelle symétrique d'ordre n admet une factorisation de Cholesky s'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B à diagonale strictement positive telle que

$$A = BB^\top.$$

1. Montrer que si la matrice réelle A est symétrique définie positive alors A est inversible.
2. Montrer que si la matrice réelle A admet une factorisation de Cholesky alors A est une matrice symétrique définie positive.
3. Montrer que si la matrice réelle A admet une factorisation de Cholesky alors A admet une factorisation $LDL^\top$. En déduire que si A admet une factorisation de Cholesky, cette factorisation est unique dès lors que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

   Dans toute la suite, on suppose que A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive.
4. Dans cette question, on veut prouver que A admet une factorisation de Cholesky par un raisonnement par récurrence.
   (a) Pour n strictement plus grand que 1, écrire la matrice A sous la forme

   $$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ V^\top & a_{nn} \end{pmatrix},$$

   où V est une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, a_{nn} est un réel et A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $n-1$. Montrer que la matrice A_{n-1} est définie positive.

   (b) On suppose que A_{n-1} admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire qu'il existe une matrice triangulaire inférieure à diagonale strictement positive B_{n-1} telle que $A_{n-1} = B_{n-1}{B_{n-1}}^\top$. Montrer que l'on peut déterminer de manière unique M de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et b de $\mathbb{R}$, $b > 0$, tels que

   $$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ M^\top & b \end{pmatrix}$$

   et $A = BB^\top$.

   (c) En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.
5. Écrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice B.
6. Comparer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique définie positive par la méthode de Cholesky avec celui de la méthode d'élimination de Gauss.
7. **Application :** déterminer la factorisation de Cholesky des matrices suivantes :

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -4 \\ 3 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système linéaire, avec ε un réel.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε la matrice A est symétrique définie positive.
2. On suppose tout d'abord que $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système matriciel $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par une méthode directe. Quelle factorisation de la matrice A peut-on envisager dans ce cas ?
3. On suppose maintenant que $\varepsilon = 2$.
   (a) Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.
   (b) En supposant que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

Exercice 13. *(factorisation QR)*

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice réelle d'ordre n inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que
$$A^\top A = R^\top R.$$
2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q, c'est-à-dire vérifiant $Q^\top Q = QQ^\top = I_n$, telle que
$$A = QR.$$
3. Montrer que cette décomposition est unique.
4. On note $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A, $(Q_j)_{1\leq j\leq n}$ celles de Q et on pose $R = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
   (a) Montrer que $A_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} Q_i$, $j = 1, \ldots, n$.
   (b) En déduire qu'obtenir la factorisation QR de A équivaut à construire une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à partir de la famille $\{A_j\}_{1\leq j\leq n}$.