Méthodes numériques (L2 - 2024/2025)
Feuille de TD n° 1 — Introduction.

Cette feuille est en partie inspirée des feuilles de TD proposées par Guillaume Legendre (jusqu'en 2024), disponibles ici : `https://www.ceremade.dauphine.fr/~legendre/enseignement/methnum/`

0 Calculs en nombres à virgule flottante, erreurs d'arrondi.

Exercice 1. *Erreurs absolues, erreurs relatives.*
Si le résultat théorique d'un calcul est $r(\neq 0)$ et que l'approximation donnée par le calcul numérique est $\hat{r}$, on appelle erreur absolue la différence $\hat{r}-r$ et erreur relative le rapport $\delta = \frac{\hat{r}-r}{r}$.
Pour des « floats » (nombres à virgule flottante double précision), on note $u = 2^{-53}$ l'erreur machine. C'est l'erreur relative maximale d'arrondi : si x et y sont des floats, l'arrondi renvoyé lors du calcul de $x+y$ est un float noté $A(x+y)$, qui vérifie $A(x+y) = (x+y)(1+\delta_+)$ où l'erreur relative δ_+ (qui dépend de x et de y) appartient à $[-u,u]$.
De même pour la soustraction, la multiplication, la division (si $y \neq 0$) et la racine carrée (si $x \geqslant 0$) :

$$A(x-y) = (x-y)(1+\delta_-), \quad A(x\cdot y) = (x\cdot y)(1+\delta_\times), \quad A(\tfrac{x}{y}) = \tfrac{x}{y}(1+\delta_\div), \quad A(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\delta_{\surd}),$$

où les erreurs relatives $\delta_-, \delta_\times, \delta_\div$ et $\delta_{\surd}$ sont toutes dans $[-u,u]$.
On cherche à évaluer les deux racines du polynôme $X^2 - 2\cdot 2025X + 1$, qui sont $x_\pm = 2025 \pm \sqrt{2025^2-1}$.

1. Quel est l'arrondi renvoyé lors du calcul de x_+ et de x_- (on considèrera que le calcul de l'entier 2025^2-1 est exact) ? Donner les erreurs absolues correspondantes.
2. Donner l'ordre de grandeur de l'erreur relative dans les deux cas. Y a-t-il une manière plus précise d'évaluer numériquement x_- ?

Exercice 2. *Approximation de la dérivée par différence finie.*
On se donne une fonction f dont on veut approximer la dérivée en x par le taux de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour un certain $h>0$. On dispose d'une approximation $\hat{f}$ de f avec une précision relative $u \ll 1$: pour tout y, $|\hat{f}(y)-f(y)| \leqslant |f(y)|u$.
On néglige les erreurs d'arrondi lors des calculs de somme, de différence et de division par h (les calculs qui suivent peuvent être adaptés en tenant compte de ces erreurs, mais deviennent plus lourds) : on s'intéresse donc au taux de variation approché $\hat{r} = \frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h}$.

1. On suppose que l'on se place sur un intervalle $[a,b]$ où f est de classe C^2, et où f et f'' sont du même ordre de grandeur : $\|f''\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$, où C est une constante « de l'ordre de grandeur de 1 ». Montrer que si x et $x+h$ sont dans $[a,b]$, ona :

$$\Big|\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)}{h} - f'(x)\Big| \leqslant \Big[\frac{2u}{h} + \frac{Ch}{2}\Big]\|f\|_\infty.$$

   Comment se comporte le h qui minimise le terme de droite de cette inégalité par rapport à u ? Donner alors l'ordre de grandeur de l'erreur finale entre la dérivée au point x et l'approximation par différence finie en utilisant $\hat{f}$.

2. Mêmes questions avec la formule de la différence finie centrée. On suppose cette fois-ci que f est de classe C^3 et que $f^{(3)}$ est du même ordre de grandeur que f : $\|f^{(3)}\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Démontrer que si $x+h$ et $x-h$ sont dans $[a,b]$, alors :

$$\Big|\frac{\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x-h)}{2h} - f'(x)\Big| \leqslant \Big[\frac{u}{h} + \frac{Ch^2}{6}\Big]\|f\|_\infty.$$

   Quel est cette fois le bon choix de h par rapport à u ? Comment se comporte l'erreur finale en fonction de u ?

Exercice 3. *Accumulation des erreurs d'arrondis, algorithme de Kahan.*
On note $u = 2^{-53}$ l'erreur machine pour les « floats » (nombres à virgule flottante double précision) : l'arrondi renvoyé lors du calcul de $x + y$ est un float noté $A(x + y)$, qui vérifie $A(x + y) = (x + y)(1 + \delta_+)$ où l'erreur relative δ_+ (qui dépend de x et de y) appartient à $[-u, u]$.
On se donne une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de floats, avec $a_n > 0$ pour tout n, et on veut calculer numériquement la somme $s_N = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$ en les additionnant un à un : on pose $\hat{s}_0 = 0$ et $\hat{s}_{n+1} = A(\hat{s}_n + a_n)$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que l'on a $|\hat{s}_N - s_N| \leqslant ((1 + u)^N - 1)s_N$. En déduire que si $Nu \leqslant 1$, l'erreur relative est au plus de l'ordre de Nu : on a $\hat{s}_N = s_N(1 + \delta)$ avec $|\delta| \leqslant (e - 1)Nu$.
2. Le float le plus petit après 1 est $1 + 2^{-52} = 1 + 2u$. Si a est un float avec $0 \leqslant a < u$, le float le plus proche de $1 + a$ est donc 1, de sorte que l'on a $A(1 + a) = 1$. Utiliser ceci pour construire une suite (a_n) pour laquelle l'erreur relative est au moins de l'ordre de Nu.
3. * L'algorithme de sommation de Kahan consiste à effectuer un peu plus de calculs pour garder en mémoire une compensation $\hat{c}_n$: on pose $\hat{c}_0 = 0$, puis à chaque étape, on ajoute $\hat{a}_n = A(a_n - \hat{c}_n)$ au lieu d'ajouter a_n. On pose donc $\hat{s}_{n+1} = A(\hat{s}_n + \hat{a}_n)$. Et on pose $\hat{c}_{n+1} = A(A(\hat{s}_{n+1} - \hat{s}_n) - \hat{a}_n)$. Que se passerait-il si les calculs étaient exacts ? Expliquer comment cet algorithme permet de corriger le problème de la question précédente.

1 Résolution d'équations scalaires non-linéaires

Exercice 4. *Ordre de convergence des suites.*

1. On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2}$.
   Montrer que la suite (x_n) converge vers 0, mais ne converge pas linéairement.
   Indication : considérer $\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$.
2. On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$x_{n+1} = x_n\Big(1 - \frac{x_n}{2}\Big) + 1.$$
   Montrer que la suite (x_n) converge linéairement.
   Indication : montrer d'abord que $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Que peut-on dire sur le taux de convergence linéaire ?
3. On pose $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$
   Montrer que la suite (x_n) converge avec un ordre supérieur ou égal à 2.
   Indication : montrer d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$.
4. * On pose $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + 2}{x_n + x_{n-1}}.$$
   Montrer que la suite (x_n) converge avec un ordre supérieur ou égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
   Indications : montrer que $x_n \in [1, 2]$ pour tout n ; en posant $y_n = x_{n+1} - x_n$ et $z_n = x_{n+1} + x_n$, montrer que $(y_{n+2}+y_{n+1})z_{n+1} = y_{n+1}z_n = -y_n(y_n+y_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$; enfin que $|y_{n+1}| \leqslant |y_n||y_{n-1}|$.

Exercice 5. *Problèmes de convergence pour la méthode de Newton.*

1. On effectue la méthode de Newton pour trouver un zéro de $x \mapsto x^3$. Montrer que la suite des itérées converge vers l'unique zéro, mais ne converge pas quadratiquement.
2. On note (x_n) la suite obtenue pour trouver un zéro de $x \mapsto \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en effectuant la méthode de Newton.
   (a) Exprimer $|x_{n+1}|$ en fonction de $|x_n|$ (on pourra montrer que x_{n+1} et x_n sont de signes opposés).
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha > 0$ vérifiant $\frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{4} - \alpha = \alpha$.
   (c) Montrer que si $|x_0| > \alpha$, alors $|x_n| \to +\infty$. Si $|x_0| < \alpha$, quel est l'ordre de convergence ?

Exercice 6. *Convergence globale de la méthode de Newton.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'(x) > 0$ et $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $[a,b]$. On suppose que f admet un zéro x_* dans $[a,b]$. On choisit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \geqslant 0$ et on veut montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ construite par la méthode de Newton converge vers x_*.

1. Montrer le résultat dans le cas où $f(x_0) = 0$.
2. Utiliser un argument de monotonie pour montrer le résultat dans le cas $f(x_0) > 0$, et faire un dessin illustratif.
3. En considérant la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$, montrer que le résultat reste vrai si on suppose cette fois-ci $f'(x) < 0$ pour tout x dans $[a,b]$. Si on suppose maintenant que $f''(x) \leqslant 0$ pour tout x dans $[a,b]$, quelle condition sur x_0 permet d'assurer la convergence globale de la méthode de Newton ?

Exercice 7. *Étude de convergence de la méthode de point fixe.*
Soit $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a,b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a,b]$.
2. On suppose à présent que la fonction g est C^1 sur $I = [\xi-h, \xi+h]$ pour un $h > 0$, et que *(uniquement dans cette question)*, $|g'(\xi)| < 1$. On va montrer que la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = g(x_k)$$

   converge vers ξ dès que l'initialisation x_0 est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe *attractif* de g.

   (a) Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que

$$\forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta],\ |g'(x) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right).$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que, pour tout réel x dans I_δ, $|g'(x)| \leq L$.

   (c) En déduire que si x_k appartient à I_δ, alors

$$|x_{k+1} - \xi| \leq L\,|x_k - \xi|,$$

   et que, si x_0 appartient à I_δ, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in I_\delta \text{ et } |x_k - \xi| \leq L^k\,|x_0 - \xi|.$$

   (d) En conclure que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.

3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ξ, sauf s'il existe k_0 tel que $x_{k_0} = \xi$ (dans ce cas la suite est stationnaire). On pourra pour cela prouver, en s'inspirant des étapes de la question précédente, qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si x_0 appartient à $I_\delta \setminus \{\xi\}$, il existe un rang k pour lequel x_k n'appartient pas à I_δ. On dit alors que ξ est un point fixe *répulsif* de g.
4. *Application.* Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{5},\ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c),\ \text{avec } 0 \leq c < 1,\ \text{et } g_3(x) = -\ln(x).$$

Exercice 8. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant, pour $\omega \in \mathbb{R}$ donné, la fonction

$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1-\omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1).$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de ω la convergence de la méthode est-elle d'ordre supérieur à un ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à deux ?

Exercice 9. *Méthode de Steffensen.* Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 possédant un zéro simple ξ. On cherche à approcher ξ par la méthode de Steffensen, une méthode de point fixe de la forme

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)},$$

l'initialisation $x_{(0)}$ étant donnée.
L'objectif de cet exercice est de prouver que, si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers ξ, alors cette convergence est au moins quadratique.

1. En effectuant un développement de Taylor–Lagrange de $f(x_k + f(x_k))$ à l'ordre deux autour du point x_k, montrer qu'il existe un réel θ_k strictement compris entre x_k et $x_k + f(x_k)$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k) f(x_k)}.$$

2. En effectuant un développement de Taylor–Lagrange approprié, montrer ensuite qu'il existe un réel η_k strictement compris entre x_k et ξ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_k) = f'(x_k)\,(x_k - \xi) - \frac{1}{2} f''(\eta_k)\,(x_k - \xi)^2$$

et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} - \xi = \frac{1}{2} \frac{f(x_k) f''(\theta_k)(x_k - \xi) + f''(\eta_k)(x_k - \xi)^2}{f'(x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k) f(x_k)}.$$

3. Par un développement de Taylor–Lagrange approprié, montrer enfin qu'il existe un réel ζ_k compris entre x_k et ξ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_k) = f'(\zeta_k)\,(x_k - \xi),$$

et en déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} - \xi = \frac{1}{2}(x_k - \xi)^2 \frac{f''(\theta_k) f'(\zeta_k) + f''(\eta_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k) f(x_k)}.$$

4. En déduire que, si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ, alors on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \mu,$$

avec μ un réel que l'on explicitera.

5. Expliquer pourquoi la méthode de Steffensen peut être considérée comme une variante de la méthode de Newton–Raphson. Quel est son avantage par rapport à cette dernière méthode ?

Exercice 10. *Procédé Δ^2 d'Aitken.* La méthode d'accélération de convergence d'Aitken consiste, à partir d'une suite $x = (x_n)$, à créer la suite $Ax = (u_n)$ définie par

$$u_n = Ax = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{\left((\Delta x)_n\right)^2}{(\Delta(\Delta x))_n},$$

où Δ est l'opérateur qui à une suite associe ses différences successives : $(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $A(ax + b) = aA(x) + b$.
2. Montrer que si $|x_n - \alpha^n| \leqslant C\beta^n$ avec $C > 0$ et $0 < \beta < |\alpha| < 1$, alors à partir d'un certain rang u_n est toujours bien définie et $u_n = O(\beta^n)$.
3. En déduire que si $x_n = \ell + K\alpha^n + O(\beta^n)$ avec $K \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n = \ell + O(\beta^n)$: la suite produite converge également vers ℓ et plus rapidement.
4. Lorsque $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = x + f(x)$, que vaut u_n ? Faire le lien avec l'exercice sur la méthode de Steffensen.