Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2024-2025

NOM ....

PRÉNOM ....

(lisiblement)

MAJUSCULES

Algèbre 4 et Méthodes numériques.
Partiel du 11 mars 2025 (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices. La plupart des questions ne sont pas bloquantes pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice :	N° copie :

Commentaires éventuels :

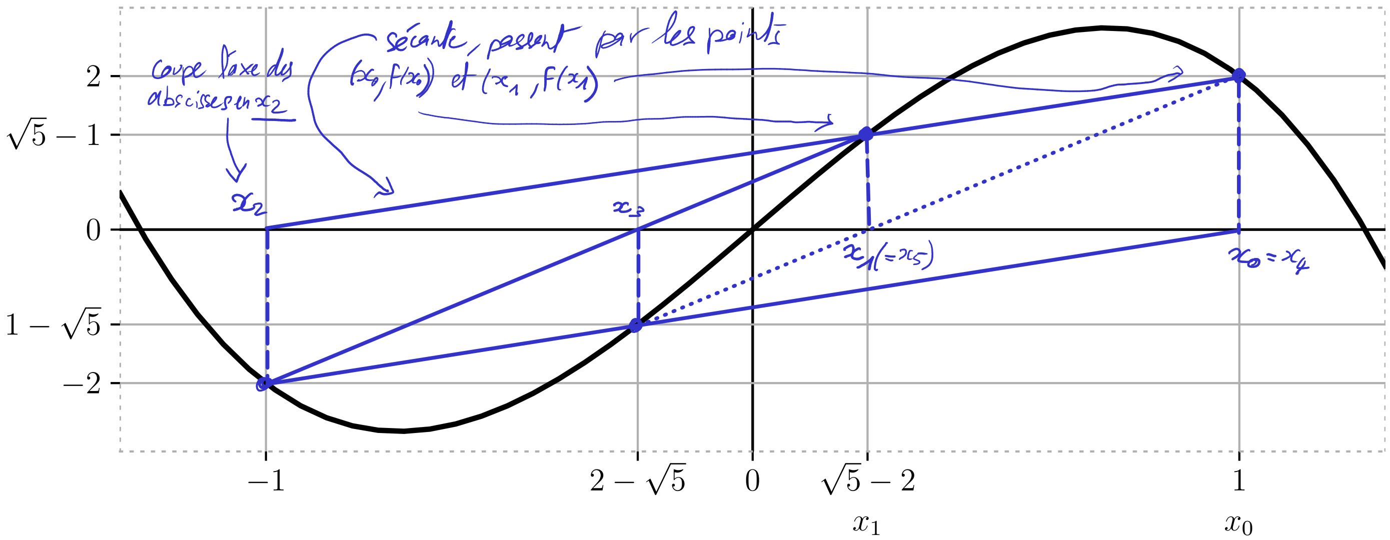
PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Méthode de la sécante pour trouver un zéro de $f : x \mapsto x\left(\frac{2(x^2-(\sqrt{5}-2)^2)}{1-(\sqrt{5}-2)^2} + \frac{(\sqrt{5}-1)(x^2-1)}{(\sqrt{5}-2)((\sqrt{5}-2)^2-1)}\right)$.

Rappeler la relation de récurrence liant les itérées x_{n+1}, x_n et x_{n-1}, lorsque $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1}-x_n}{f(x_{n-1})-f(x_n)} \times f(x_n)$$

On a tracé ci-dessous le graphique de la fonction f sur $[-1.3, 1.3]$, et posé $x_0 = 1$ et $x_1 = \sqrt{5}-2$. Déterminer graphiquement (et soigneusement) la position des itérées x_2, x_3 et x_4.



Montrer que $f(1) = 2$ et $f(\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}-1$, et en déduire que $x_2 = -1$ et $x_3 = 2-\sqrt{5}$.

$f(1) = 1 \times \left[\frac{2(1-(\sqrt{5}-2)^2)}{(1-(\sqrt{5}-2)^2)} + \frac{0}{\dots}\right] = 2.$ $\quad \boxed{f(x_0)}$

$f(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5}-2)\left[\frac{2\times 0}{\dots} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{(\sqrt{5}-2)^2-1}{(\sqrt{5}-2)^2-1}\right]$

$\boxed{f(x_1) = \sqrt{5}-1}$

Donc $\boxed{x_2 = x_1 - \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} f(x_1)} = \sqrt{5}-2 - \frac{\sqrt{5}-2-1}{\sqrt{5}-1-2} \times (\sqrt{5}-1) = \boxed{-1}$

Comme f est impaire $\boxed{f(x_2) = -f(1) = -2}$.

Donc $\boxed{x_3 = x_2 - \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} f(x_2)} = -1 - \frac{-1-(\sqrt{5}-2)}{-2-(\sqrt{5}-1)} \times (-2) = -1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \times 2 \left(\times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right)$

$= -1 + \frac{2\times(5-2\sqrt{5}+1)}{5-1}$

$= -1 + (3-\sqrt{5}) = \boxed{2-\sqrt{5}}$

(Donc $x_3 = -x_1$).

Déterminer les valeurs de x_4 et x_5.

On peut refaire les mêmes calculs, ou simplement observer que f est impaire et $(x_2, x_3) = (-x_0, -x_1)$

Donc $\boxed{x_4} = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} f(x_3) = -x_1 - \frac{-x_1 + x_0}{-f(x_1) + f(x_0)} \times \left(-f(x_0)\right) = -\left(x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0)\right) = -x_2$

$= \boxed{x_0 = 1}$

De même $x_5 = x_4 - \frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} f(x_4) = -x_2 - \frac{-x_2 + x_1}{-f(x_2) + f(x_1)} \times \left(-f(x_2)\right) = -x_3 = x_1 = \boxed{\sqrt{5} - 2}$

En déduire que la suite ne converge pas.

Par une récurrence immédiate, on a donc $x_{n+4} = x_n$. Donc la suite est périodique et non constante, donc ne converge pas.

Énoncer le théorème de convergence locale de la méthode de la sécante. S'applique-t-il en 0 pour f ? Est-ce en contradiction avec la question précédente ?

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage d'un zéro x_*, et que $f'(x_*) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que, en notant $I_\delta = [x_* - \delta, x_* + \delta]$, toute suite initialisée avec x_0, x_1 dans I_δ avec $x_0 \neq x_1$ se comporte d'une des manières suivantes :

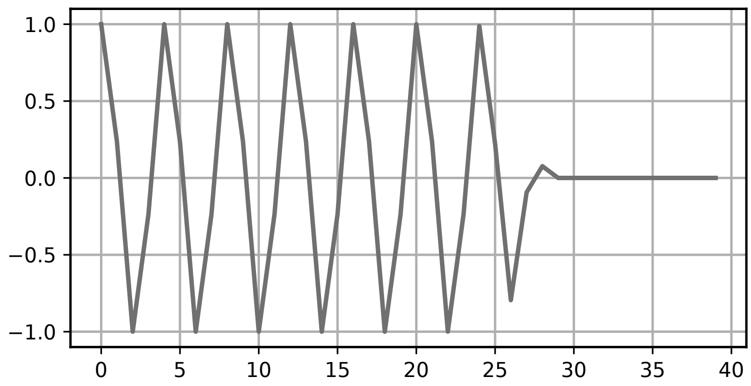
- Soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x_*$ (et $x_{n-1} \neq x_n$, donc $x_{n+1} = x_n - \frac{\cdots}{\cdots} \times 0 = x_n$, on s'arrête : on a trouvé un zéro en un nombre fini d'étapes. en fait, on a même $x_k \in I_\delta \; \forall k \in [\![0, n]\!]$)
- Soit la suite (x_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$), $x_n \in I_\delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. et $x_n \to x_*$ à un ordre $\geq \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1{,}618$.

Ici cela pourrait s'appliquer pour f sans contradiction avec ce qui précède. On a simplement pris x_0 et x_1 trop éloignés de 0.

(On a bien f $\mathcal{C}^2$ et $f'(0) \neq 0$ (le calcul est un peu laborieux))

On a implémenté la méthode ci-dessous. Expliquer la différence avec les résultats théoriques.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  a=np.sqrt(5)-2
5  def f(x):
6      return x*(2*(x**2-a**2)/(1-a**2)-(x**2-1)*(a+1)/(a*(1-a**2)))
7
8  x_old,xn=1,a
9  lx=[x_old,xn]
10 fx_old,fxn=f(x_old),f(xn)
11 for n in range(2,40):
12     if fx_old!=fxn:
13         x_old,xn=xn,xn-(x_old-xn)/(fx_old-fxn)*fxn
14         fx_old,fxn=fxn,f(xn)
15     lx.append(xn)
16 plt.plot(np.array(lx))
17 plt.grid()
```



On observe que la suite se comporte presque comme une suite périodique pour les premières itérations (de période 4). Mais les erreurs d'arrondi font que l'on n'a pas exactement cette propriété pour les floats calculés par la méthode. Et au bout de quelques itérations les valeurs de x_n (dans la liste lx) convergent vers 0.

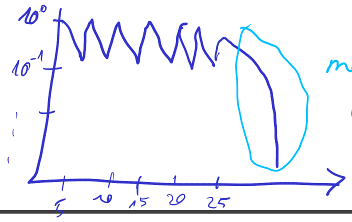
On peut donc s'attendre que la convergence soit alors superlinéaire, puisqu'on atteindrait l'intervalle I_δ donné dans le théorème.

Par quoi remplacer une des lignes du code pour observer la vitesse de convergence (vers 0) ?

On peut remplacer la ligne 16 par $\boxed{\texttt{plt.semilogy(np.abs(np.array(lx)))}}$

il faut des quantités >0 pour un affichage en échelle semilogarithmique.

On s'attend à :



marqueur de la convergence superlinéaire.

Exercice 2. Descente de gradient à pas constant. Soit f une fonction de classe C^2 admettant un unique minimum strict en x_*. On cherche à approximer x_* (en tant que zéro de f') en fixant x_0 et $h > 0$ et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - hf'(x_n)$.

On pose $g(x) = x - hf'(x)$, et on suppose que $f''(x_*) \neq 0$. Déterminer un $h_0 > 0$ tel que si $h < h_0$, alors g est contractante sur $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ (avec δ suffisamment petit, qui peut dépendre de h).

On a $g'(x) = 1 - hf''(x)$. Comme x_* est un min et f $\mathcal{C}^2$, on a $\boxed{f'(x_*) = 0}$

On ne peut pas avoir $f''(x_*) < 0$: on aurait un max local strict (se voit avec un développement de Taylor).

Donc $g'(x_*) = 1 - h\underbrace{f''(x_*)}_{>0}$. Si on prend $h_0 = \frac{2}{f''(x_*)}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{f''(x_*)}\right)$,

On obtient $g'(x_*) = 1 - 2\frac{h}{h_0} \in]-1, 1[$ si $h < h_0$. Donc $|g'(x_*)| < 1$. On peut prendre $\varepsilon > 0$ tel que $|g'(x_*)| + \varepsilon < 1$, On note $K = |g'(x_*)| + \varepsilon$.

Par continuité de g', on peut trouver δ tel que pour $x \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$, $|g'(x) - g'(x_*)| < \varepsilon$.

Donc pour un tel x, $\boxed{|g'(x)|} \leq |g'(x_*)| + |g'(x) - g'(x_*)| \leq |g'(x_*)| + \varepsilon = \boxed{K}$

Donc g est K-Lipschitzienne sur $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ avec $K < 1$. <u>Elle y est donc contractante</u>

En déduire que si $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$, la suite (x_n) converge linéairement vers x_*.

Par récurrence, si $x_n \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ alors $|x_{n+1} - x_*| = |g(x_n) - g(x_*)| \leq K|x_n - x_*| \leq K\delta \leq \delta$. car $f(x_*)=0$

$\in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ Donc $x_{n+1} \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$

Donc si $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a • $x_n - x_* \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$

• $|x_{n+1} - x_*| \leq K|x_n - x_*|$.

On a donc par récurrence $|x_n - x_*| \leq K^n |x_0 - x_*|$. avec $K < 1$

Donc convergence linéaire avec taux de convergence linéaire $\leq K$.

On pouvait aussi directement appliquer le théorème de pt fixe, mais ⚠ :
- Il faut alors montrer que le pt fixe est x_* (ok car $f(x_*)=0$).
- Mais surtout montrer que $g([x_* - \delta, x_* + \delta]) \subset [x_* - \delta, x_* + \delta]$. (un peu comme au-dessus : $|x - x_*| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - x_*| \leq \delta$)

On prend cette fois-ci $f(x) = \frac{1}{4}x^4$, et on fixe $h > 0$ arbitraire. Montrer que quel que soit $x_0 \in]-\sqrt{\cancel{h}}, \sqrt{\cancel{h}}[$, la suite (x_n) converge vers 0.

$\sqrt{\frac{1}{h}}, \sqrt{\frac{1}{h}}$

On a $g(x) = x - hx^3 = x(1 - hx^2)$. Si $|x| < \sqrt{\frac{1}{h}}$, alors $|g(x)| = |x| |1 - hx^2| = |x|(1 - h|x|^2) < |x|$.

<1 (donc $1 - h|x|^2 \geq 0$)

Donc par récurrence si $|x_n| < \sqrt{\frac{1}{h}}$, alors $|x_{n+1}| = |g(x_n)| \leq |x_n| < \sqrt{\frac{1}{h}}$.

Donc si $|x_0| < \sqrt{\frac{1}{h}}$, la suite $(|x_n|)$ est décroissante, converge vers $\ell \in [0, \sqrt{\frac{1}{h}}]$

On a alors $|x_{n+1}| = |g(x_n)| = |x_n|(1 - h|x_n|^2)$

par unicité de la limite $\ell = \ell(1 - h\ell^2)$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = \pm\sqrt{\frac{1}{h}}$ impossible.

Donc $\ell = 0$ et $|x_n| \to 0$ donc $\boxed{x_n \to 0}$

En déduire que quel que soit $\alpha \in]0, 1[$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, |x_{n+1}| \geqslant \alpha |x_n|$. (toujours pour $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{h}}$)

On fixe $\alpha < 1$.

Comme $|x_n| \to 0$, à partir d'un certain rang $1 - h|x_n|^2 \geq \alpha$.

Donc $|x_{n+1}| \geq \alpha |x_n|$.

La suite (x_n) converge-t-elle linéairement ?

On a $|x_n| \geq \alpha^{n-n_0} |x_{n_0}|$ par récurrence immédiate. Donc si $x_0 \neq 0$

Si $\beta < 1$ est tel que $|x_n| \leq C\beta^n$, on a une contradiction

en prenant $\alpha \in]\beta, 1[$: on ne peut pas avoir $\alpha^{n-n_0}|x_{n_0}| \leq C\beta^n$ $\forall n \geq n_0$)

(Comparaison des croissances géométriques)

Donc pas de convergence linéaire.

Exercice 3. Approximation par le point milieu et les dérivées aux bords.

Si $f \in C^3([-1,1])$, montrer qu'il existe un unique $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_f'(\pm 1) = f'(\pm 1)$ et $P_f(0) = f(0)$.

Plusieurs options pour l'existence

- Poser $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ d'interpolation de Lagrange de f' en ± 1, puis $P_f(x) = f(0) + \int_0^x Q(t)\,dt$.

  Alors $\boxed{P_f \in \mathbb{R}_2[X]}$ et $P_f' = Q$

  Donc $\boxed{P_f'(\pm 1) = Q(\pm 1) = f'(\pm 1)}$

  Puis $\boxed{P_f(0) = f(0)}$.

- Poser
  - $Q_1 = \frac{X^2 + 2X}{4}$ $(Q_1'(1) = 1,\ Q_1'(-1) = 0,\ Q_1(0) = 0)$
  - $Q_{-1}(X) = -Q_1(-X)$ $(Q_{-1}'(-1) = Q_1'(1) = 1 \quad Q_{-1}'(1) = Q_1'(-1) = 0 \quad Q_{-1}(0) = 0)$
  - et $R(X) = 1$ $\quad R'(-1) = 0 = R'(1),\ R(0) = 0$

  Puis prendre $P_f = f'(-1) \times Q_1 + f'(1) \times Q_{-1} + f(0) \times R$.

- Ecrire $P_f(x) = ax^2 + bx + c$ et résoudre

$$\begin{cases} -2a + b = f'(-1) \\ 2a + b = f'(1) \\ c = f(0) \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{f'(1) - f'(-1)}{4} \\ b = \dfrac{f'(1) + f'(-1)}{2} \\ c = f(0). \end{cases}$$

C'est une équivalence, donnant à la fois existence et unicité

Unicité : par diff. Si $P'(-1) = P'(1) = P(0) = 0$ alors $P' \in \mathbb{R}_1[X]$ avec 2 racines donc $P' = 0$ puis $P = cte = P(0) = 0$.

On fixe $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Pour $t \in [-1,1]$, on pose $w(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{t^3 - 3t}{x^3 - 3x}\big(f(x) - P_f(x)\big)$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $w^{(3)}(\xi) = 0$.

On a $\boxed{w(0) = 0 - 0 = 0}$ et $\boxed{w(x) = 0}$ donc on trouve η entre 0 et x tq $\boxed{w'(\eta) = 0}$ (par Rolle)

$$w'(t) = f'(t) - P_f'(t) - \frac{3(t^2 - 1)}{x^3 - 3x}\big(f(x) - P_f(x)\big).$$

Donc $\boxed{w'(\pm 1) = f'(\pm 1) - P_f'(\pm 1) - 0 = 0}$

Donc avec Rolle deux fois on a $\theta_1 \in]-1, \eta[$ et $\theta_2 \in]\eta, 1[$ tels que $\boxed{w''(\theta_1) = w''(\theta_2) = 0}$

On fait encore une fois la même chose et on trouve $\xi \in \underbrace{]\theta_1, \theta_2[}_{\subset]-1,1[}$ tel que $\underline{w'''(\xi) = 0}$

En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x^3 - 3x)$, puis que $\sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{3} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)|$.

On calcule $w^{(3)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) - 0 - \frac{3!}{x^3-3x}\left(f(x) - P_f(x)\right)$

Donc pour le ξ de la question précédente, on a $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x^3-3x)$

Donc $|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{1}{3!} \sup_{\xi\in[-1,1]} |f^{(3)}(\xi)| \times |x^3-3x|$.

Si $x \in [-1,1]$ $|x^3-3x| \leq 2$

x	-1		1
$3(x^2-1)$	0	$-$	0
x^3-3x	2	$\searrow$	-2

Donc $|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{2}{3!} \|f^{(3)}\|_\infty = \frac{1}{3}\|f^{(3)}\|_\infty$

Donc $\|f - P_f\|_\infty \leq \frac{1}{3}\|f^{(3)}\|_\infty$

On pose $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\mathrm{d}x$. Calculer $I_{-1,1}(x \mapsto x^i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

comme $P_{(x\mapsto x^i)} = (x \mapsto x^i)$ pour $i = 0,1,2$ (ce sont des polynômes $\in \mathbb{R}_2[X]$. qui ont les mêmes valeurs et même valeur de dérivée qu'eux-mêmes !)

Donc $I_{-1,1}(x \to x^i) = \int_{-1}^{1} x^i \, dx = \begin{cases} 2 & i=0 \\ 0 & i=1 \\ \frac{2}{3} & i=2. \end{cases}$

Pour $f: x\mapsto x^3$ On peut par symétrie montrer que $P_f(x) = -P_f(-x)$

(en posant $Q(x) = -P_f(-x)$ on a bien $Q'(x) = P_f'(-x)$ donc $\boxed{Q'(\pm1) = P_f'(\mp 1) = f'(\mp1) = f'(\pm 1)}$ car f paire).

et $\boxed{Q(0) = -P_f(-0) = 0} = f(0)$

Donc P_f est impaire donc $\int_{-1}^{1} P_f(x)\,dx = 0$

$I_{-1,1}(x \mapsto x^3) = 0 \quad \left(= \int_{-1}^{1} x^3\,dx\right)$.

Ou calculer $P_f(x) = 3x$ (on a bien $f'(\pm1) = \pm 3$, $f(0) = 0$ idem pour $x \mapsto 3x$)

Donc $\int_{-1}^{1} P_f(x)dx = 0$

En déduire une expression de $I_{-1,1}(f)$ en fonction de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$, puis que le degré d'exactitude de cette formule de quadrature est au moins égal à 3.

Ici on peut utiliser les premiers calculs explicites :

$P_f(x) = \frac{x^2+2x}{4} f'(1) + \frac{-x^2+2x}{4} f'(-1) + f(0)$.

Donc $I_{-1,1}(f) = f'(1) \times \left(\frac{\frac{2}{3}+0}{4}\right) + f'(-1)\left(\frac{-2/3+0}{4}\right) + 2f(0)$

ou

$P_f(x) = \frac{f(1)-f(-1)}{4} x^2 + \frac{f(-1)+f(1)}{2} x + f(0)$

$I_{-1,1}(f) = \frac{f(1)-f(-1)}{4} \times 2/3 + 0 + 2f(0)$.

$= \boxed{\frac{f(1)-f(-1)}{6} + 2f(0)}$

Puis, comme on a avec $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ pour $f = x \mapsto \begin{cases} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{cases}$ on en déduit par linéarité que cette formule est valide pour tout $f \in \mathbb{R}_3[x]$ donc le degré d'exactitude est $\geqslant 3$.

Si $f \in C^3(\mathbb{R})$, on pose $I_{a,b}(f) = \frac{b-a}{2} I_{-1,1}(t \mapsto f(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b))$.
Montrer que $I_{a,b}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$.

On pose $g(t) = f(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b)$ $\quad g'(-1) = \frac{b-a}{2} f'(a)$ $\quad g'(1) = \frac{b-a}{2} f'(b)$ $\quad g(0) = f(\frac{a+b}{2})$.

Donc $I_{-1,1}(g) = \frac{g'(1) - g'(-1)}{6} + 2\,g(0) = \frac{b-a}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) + 2\,f(\frac{a+b}{2})$.

On multiplie par $\frac{b-a}{2}$ pour obtenir $I_{a,b}(f)$, ce qui donne la formule voulue.

On pose $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ et $\widetilde{I}_{a,b,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{a_i,a_{i+1}}(f)$.
À quel ordre de grandeur de l'erreur $|\widetilde{I}_{a,b,n}(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x|$ s'attend-on, en fonction de n ?
Avec quel type de graphique peut-on visualiser et estimer cet ordre de grandeur ?
Quel est l'intérêt pratique d'une telle méthode par rapport à la méthode de Simpson ?
On pourra donner des morceaux de code pour répondre.

- Méthode d'ordre ≥ 3 (on peut s'attendre à ordre $= 3$ au vu de l'estimation d'interpolation : pour $f : x \mapsto x^4$, on a $f(x) - P_f(x) = \frac{24}{3!} \underbrace{x(x^3 - 3x)}_{\text{d'intégrale} \neq 0 \text{ sur } [-1,1]}$

Donc erreur de l'ordre de h^4 pour la quadrature composée, avec $h = \frac{b-a}{n}$
Donc d'ordre de grandeur $\frac{1}{n^4}$

(en supposant par exemple que f est $\mathcal{C}^4$, on peut alors appliquer le th. du cours. Si f est seulement $\mathcal{C}^3$, alors on n'aura peut-être que $\frac{1}{n^3}$ comme ordre d'erreur)

- Graphique en log log : on observe une pente $\boxed{-4}$: si n est multiplié par 10, l'erreur est divisée par 10^4.

- Intérêt pratique : somme télescopique, seulement $n+2$ termes

$$\widetilde{I}_{a,b,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{24n^2}\left(f'(b) - f'(a)\right).$$

Comparer avec Simpson : $2n+1$ termes pour un même ordre de grandeur d'erreur.

Cette question est assez ouverte, tout bout de code donné pour illustrer ce qu'on attend sera pris en compte dans l'évaluation, de même que tout commentaire pertinent.