Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

L2 MIDO 2024-2025

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Algèbre 4 et Méthodes numériques.
Partiel du 11 mars 2025 (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices. La plupart des questions ne sont pas bloquantes pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace.

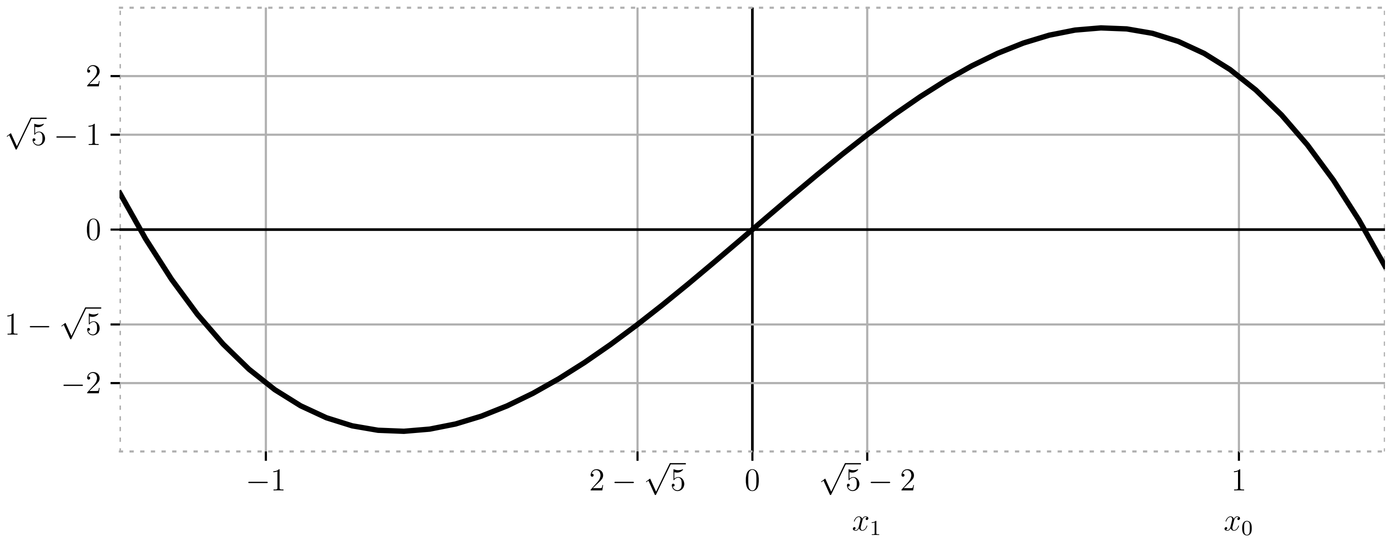
Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice :	N° copie :
Commentaires éventuels :	

PARTIE
À
RABATTRE

Exercice 1. Méthode de la sécante pour trouver un zéro de $f : x \mapsto x\left(\frac{2(x^2-(\sqrt{5}-2)^2)}{1-(\sqrt{5}-2)^2} + \frac{(\sqrt{5}-1)(x^2-1)}{(\sqrt{5}-2)((\sqrt{5}-2)^2-1)}\right)$.

Rappeler la relation de récurrence liant les itérées x_{n+1}, x_n et x_{n-1}, lorsque $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$.

On a tracé ci-dessous le graphique de la fonction f sur $[-1.3, 1.3]$, et posé $x_0 = 1$ et $x_1 = \sqrt{5} - 2$. Déterminer graphiquement (et soigneusement) la position des itérées x_2, x_3 et x_4.



Montrer que $f(1) = 2$ et $f(\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5} - 1$, et en déduire que $x_2 = -1$ et $x_3 = 2 - \sqrt{5}$.

Déterminer les valeurs de x_4 et x_5.

En déduire que la suite ne converge pas.

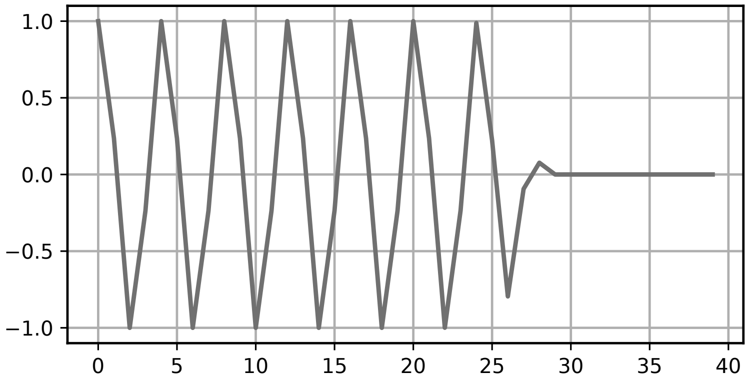
Énoncer le théorème de convergence locale de la méthode de la sécante. S'applique-t-il en 0 pour f ? Est-ce en contradiction avec la question précédente ?

On a implémenté la méthode ci-dessous. Expliquer la différence avec les résultats théoriques.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=np.sqrt(5)-2
def f(x):
    return x*(2*(x**2-a**2)/(1-a**2)-(x**2-1)*(a+1)/(a*(1-a**2)))

x_old,xn=1,a
lx=[x_old,xn]
fx_old,fxn=f(x_old),f(xn)
for n in range(2,40):
    if fx_old!=fxn:
        x_old,xn=xn,xn-(x_old-xn)/(fx_old-fxn)*fxn
        fx_old,fxn=fxn,f(xn)
    lx.append(xn)
plt.plot(np.array(lx))
plt.grid()
```



Par quoi remplacer une des lignes du code pour observer la vitesse de convergence (vers 0) ?

Exercice 2. Descente de gradient à pas constant. Soit f une fonction de classe C^2 admettant un unique minimum strict en x_*. On cherche à approximer x_* (en tant que zéro de f') en fixant x_0 et $h > 0$ et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - hf'(x_n)$.

On pose $g(x) = x - hf'(x)$, et on suppose que $f''(x_*) \neq 0$. Déterminer un $h_0 > 0$ tel que si $h < h_0$, alors g est contractante sur $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ (avec δ suffisamment petit, qui peut dépendre de h).

En déduire que si $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$, la suite (x_n) converge linéairement vers x_*.

On prend cette fois-ci $f(x) = \frac{1}{4}x^4$, et on fixe $h > 0$ arbitraire. Montrer que quel que soit $x_0 \in]-\sqrt{h}, \sqrt{h}[$, la suite (x_n) converge vers 0.

En déduire que quel que soit $\alpha \in]0, 1[$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, |x_{n+1}| \geqslant \alpha |x_n|$.

La suite (x_n) converge-t-elle linéairement ?

Exercice 3. Approximation par le point milieu et les dérivées aux bords.

Si $f \in C^3([-1,1])$, montrer qu'il existe un unique $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_f'(\pm 1) = f'(\pm 1)$ et $P_f(0) = f(0)$.

On fixe $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$. Pour $t \in [-1,1]$, on pose $w(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{t^3-3t}{x^3-3x}\Big(f(x) - P_f(x)\Big)$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $w^{(3)}(\xi) = 0$.

En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x^3 - 3x)$, puis que $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{3} \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(3)}(x)|$.

On pose $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x) \mathrm{d}x$. Calculer $I_{-1,1}(x \mapsto x^i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

En déduire une expression de $I_{-1,1}(f)$ en fonction de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$, puis que le degré d'exactitude de cette formule de quadrature est au moins égal à 3.

Si $f \in C^3(\mathbb{R})$, on pose $I_{a,b}(f) = \frac{b-a}{2} I_{-1,1}(t \mapsto f(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b))$.
Montrer que $I_{a,b}(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$.

On pose $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ et $\widetilde{I}_{a,b,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{a_i,a_{i+1}}(f)$.
À quel ordre de grandeur de l'erreur $|\widetilde{I}_{a,b,n}(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x|$ s'attend-on, en fonction de n ?
Avec quel type de graphique peut-on visualiser et estimer cet ordre de grandeur ?
Quel est l'intérêt pratique d'une telle méthode par rapport à la méthode de Simpson ?
On pourra donner des morceaux de code pour répondre.