L2 MIDO 2024-2025

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Algèbre 4 et Méthodes numériques.
Entraînement au partiel du 11 mars 2025 (durée 2h).

L'examen se compose de trois exercices. La plupart des questions ne sont pas bloquantes pour répondre aux suivantes, prenez le temps de lire les énoncés dans leur intégralité.

Toutes les réponses sont à faire sur la copie d'énoncés.

Le soin apporté à la rédaction, la clarté, la concision et le respect des consignes (en particulier l'écriture lisible de son NOM et PRÉNOM) font partie de l'évaluation. Il y a largement la place de répondre dans les cases, utilisez le brouillon à bon escient pour être efficace.

Réservé pour la correction. Initiales correcteur / correctrice : N° copie :

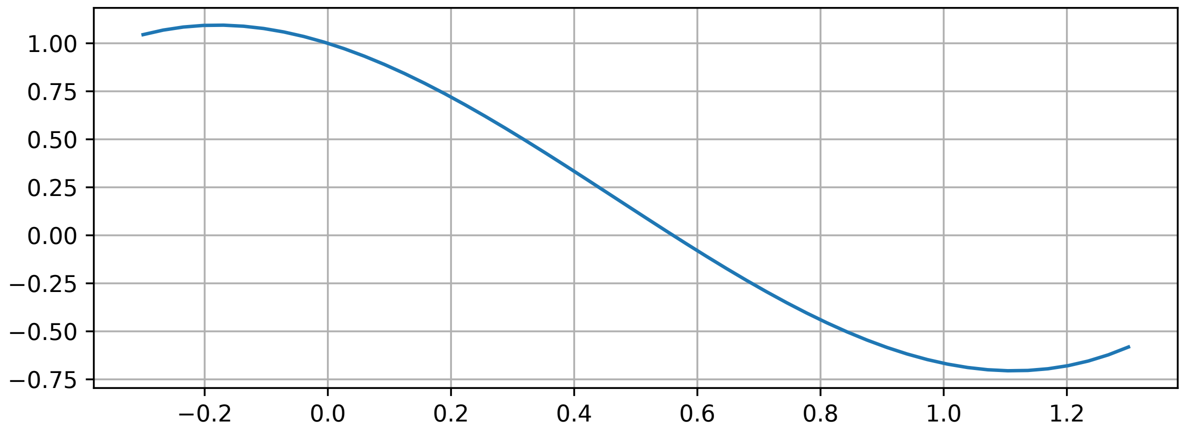
Commentaires éventuels :

PARTIE À RABATTRE

Exercice 1. Méthode de Newton pour trouver un zéro de $f : x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - x + 1$.

Rappeler la relation de récurrence liant les itérées x_{n+1} et x_n, lorsque $f'(x_n) \neq 0$.

On a tracé ci-dessous le graphique de la fonction f sur $[-0.3, 1.3]$, et posé $x_0 = 1$.
Déterminer graphiquement (et soigneusement) la position des itérées x_1 et x_2.



Déterminer les valeurs de x_1 et x_2. En déduire que la suite ne converge pas.

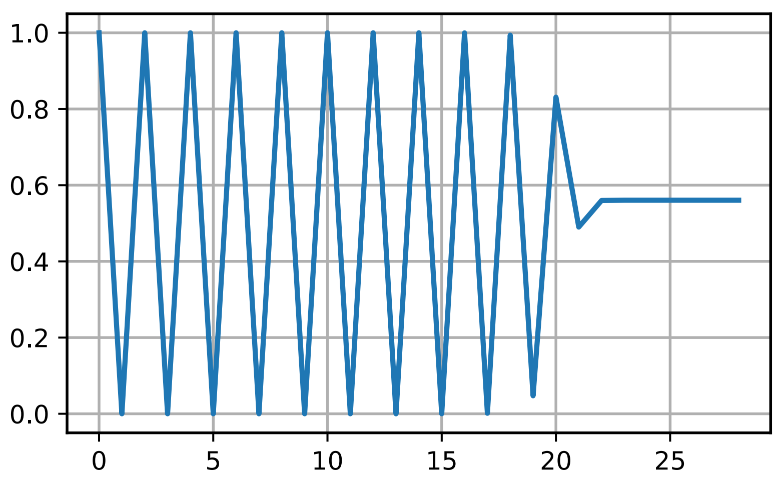
Énoncer le théorème de convergence locale de la méthode de Newton. S'applique-t-il pour f ? Est-ce en contradiction avec la question précédente ?

On a implémenté la méthode ci-dessous. Expliquer la différence avec les résultats théoriques.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 5/3 *x**3 - 7/3*x**2 - x + 1
def df(x):
    return 5*x**2 - 14*x/3 -1

xn=1
lx=[xn]
for n in range(2,30):
    dfxn=df(xn)
    if dfxn!=0:
        xn=xn-f(xn)/dfxn
    lx.append(xn)
plt.plot(np.array(lx))
plt.grid()
```



Par quoi remplacer une des lignes du code pour observer la vitesse de convergence ?

Exercice 2. Approximation par les valeurs et les dérivées aux bords.

Si $f \in C^4([-1,1])$, montrer qu'il existe un unique $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f'(\pm 1) = f'(\pm 1)$ et $P_f(\pm 1) = f(\pm 1)$.

On fixe $x \in]-1,1[$. Pour $t \in [-1,1]$, on pose $w(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{(t^2-1)^2}{(x^2-1)^2}\Big(f(x) - P_f(x)\Big)$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $w^{(4)}(\xi) = 0$.

En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x^2-1)^2$, puis que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{4!} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|$.

On pose $I_{-1,1}(f) = \int_{-1}^{1} P_f(x)\mathrm{d}x$. Calculer $I_{-1,1}(x \mapsto x^i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

En déduire une expression de $I_{-1,1}(f)$ en fonction de $f(\pm 1)$, et $f'(\pm 1)$, puis que le degré d'exactitude de cette formule de quadrature est égal à 3.

Si $f \in C^3(\mathbb{R})$, on pose $I_{a,b}(f) = \frac{b-a}{2} I_{-1,1}(t \mapsto f(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b))$.
Montrer que $I_{a,b}(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a))$.

On pose $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ et $\widetilde{I}_{a,b,n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{a_i,a_{i+1}}(f)$.
À quel ordre de grandeur de l'erreur $|\widetilde{I}_{a,b,n}(f) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x|$ s'attend-on, en fonction de n ?
Avec quel type de graphique peut-on visualiser et estimer cet ordre de grandeur ?
Quel est l'intérêt pratique d'une telle méthode par rapport à la méthode de Simpson ?
On pourra donner des morceaux de code pour répondre.

Exercice 3. Étude de la méthode de la sécante.

Soit f une fonction de classe C^2, ayant un zéro en $x_* \in \mathbb{R}$. On se donne deux points x_n et x_{n-1}. On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_n et x_{n-1}. Déterminer une expression de $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$, montrer que $P(x)$ a un unique zéro, que l'on note x_{n+1}, qui correspond à l'itéré de la méthode de la sécante. Montrer alors que l'on a $x_{n+1} - x_* = -P(x_*)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$.

On suppose que $x_n \neq x_*$ et $x_{n-1} \neq x_*$, et on pose $w(t) = f(t) - P(t) + P(x_*)\frac{(t-x_n)(t-x_{n-1})}{(x_*-x_n)(x_*-x_{n-1})}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe ξ entre les trois points x_*, x_n et x_{n-1} tel que $w''(\xi) = 0$.

Déduire des deux questions précédentes que si $x_n \neq x_*$, $x_{n-1} \neq x_*$ et $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$, alors il existe θ entre x_n et x_{n-1} et ξ entre les trois points x_*, x_n et x_{n-1} tels que $x_{n+1} - x_* = \frac{f''(\xi)}{2f'(\theta)}(x_n - x_*)(x_{n-1} - x_*)$.

Si de plus $f'(x_*) \neq 0$, on admet alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que, en notant $I_\delta =]x_* - \delta, x_* + \delta[$, si x_n et x_{n-1} sont dans I_δ et distincts, alors x_{n+1} est bien défini pour la formule de la sécante, et on a $|x_{n+1} - x_*| \leqslant \frac{1}{\delta}|x_n - x_*||x_{n-1} - x_*|$.
Montrer que si x_0 et x_1 sont dans I_δ et distincts, alors soit il existe $n \geqslant 0$ tel que $x_n = x_*$, soit pour tout $n \geqslant 0$ on a x_{n+1} et x_n dans I_δ et distincts.

Montrer alors que dans ce deuxième cas, il existe $\alpha < 1$ tel qu'en notant $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la solution positive de $\varphi^2 = \varphi + 1$, on a pour tout $n \geqslant 0$ $|x_n - x_*| \leqslant \delta\alpha^{\varphi^n}$.