

3-2.2 Groupe « Mathématiques de l'Économie et de la Finance »

Productions scientifiques du groupe

Imen BEN TAHAR a étudié des modèles de réseaux électriques. Le réseau électrique, longtemps marqué par le paradigme d'une génération centralisée, connaît un regain d'intérêt pour la génération distribuée et l'intégration de sources locales intermittentes, stochastiques. La première contribution de son travail [A688] est de proposer un cadre mathématique stylisé, analytiquement et numériquement traitable, pour aborder des nouvelles questions posées par la génération et le stockage distribués. Ce modèle stylisé amène à l'analyse d'un jeu stochastique différentiel à somme non-nulle où un grand nombre N de joueurs interagissent à travers le mécanisme de prix spot. Il fait appel à la Théorie des Jeux à Champs Moyen Étendue (Extended Mean Field Game, EMFG).

De son côté, Philippe BERGAULT a publié, avec Alexander Barzykin (HSBC) et Olivier Guéant (Paris 1), une série de papiers dans lesquels ils utilisent différents outils de contrôle optimal stochastique (solutions de viscosité, équations de Riccati...) afin de traiter les problèmes de market making sur le marché des devises. Le modèle est inspiré à la fois des modèles de market making à la Avellaneda-Stoikov, et des modèles d'exécution optimale à la Almgren-Chriss, afin de prendre en compte la possibilité pour le market maker de liquider son inventaire sur un marché D2D dans le but de réduire son risque. Cette situation n'avait jamais été traitée dans la littérature. Avec Louis Bertucci (ILB), David Bouba (Swaap), et Olivier Guéant (Paris 1), il a proposé un modèle de jeu à champ moyen afin de modéliser les interactions entre market makers et traders stratégiques. Avec Bastien Baldacci, il a publié un article proposant un modèle de contrôle d'EDP stochastique afin d'obtenir des incitations optimales pour une plateforme souhaitant améliorer la liquidité dans un carnet d'ordres.

L'un des principaux résultats de Bruno BOUCHARD a été obtenu dans [A3]. Avec ses collaborateurs, ils y établissent des conditions nécessaires et suffisantes, reliant une formulation généralisée du drift de Stratonovich et le cône normal du premier ordre d'un domaine, pour qu'une diffusion demeure dans ce domaine (possiblement non convexe). Leur contribution majeure est qu'ils ne supposent pas que le coefficient de diffusion est continument dérivable jusqu'au bord du domaine, c'est seulement son carré qui l'est. Ce type d'hypothèse est bien connu dans les modèles affines ou polynomiaux très utiles en finance, mais son traitement était fait au cas par cas, là où ils proposent une approche alternative basée sur l'estimation de doubles intégrales stochastiques en temps petit. Une autre contribution importante est [A134] dans laquelle ils proposent une approche par randomisation pour étudier des modèles de marchés financiers avec coûts de transaction en incertitude de modèle. Cette approche a été pionnière et a permis de prouver une version du premier théorème fondamental de finance mathématique qui restait un problème totalement ouvert.

Pierre BRUGIERE et Gabriel TURINICI présentent dans [P50] une méthode de calcul d'un estimateur de la "Value at Risk" d'un actif financier en utilisant des réseaux de neurones génératifs. Le principal résultat obtenu par Pierre CARDALIAGUET pendant la période est l'existence de solutions pour des problèmes avec bruits communs (système MFG et master equation) et l'utilisation de la master equation pour prouver la convergence des systèmes de Nash à N joueurs vers la solution de la master equation [O4]. Il a également proposé des méthodes d'apprentissage d'un équilibre [A223], des résultats de stabilité [A184], une analyse de MFG en présence de contrainte sur l'état [A208], des résultats sur le comportement en temps long de la master equation [A228], une analyse de la master equation pour des modèles avec un joueur majeur [A220], une analyse des systèmes MFG en présence de bruits communs et sans bruits idiosyncratiques [A233, A234].

Guillaume CARLIER s'est intéressé avec Benamou, Nenna et di Marino à une formulation lagrangienne des MFG par minimisation d'entropie sur les mesures sur l'espace des trajectoires et son implémentation numérique [A67]; il a aussi développé avec Lasry et Barilla un modèle MFG multi-populations pour l'évolution des villes [A58], une méthode de Laplace à deux échelles pour les problèmes bi-niveaux (jeux de Stackelberg) [A247] et continué à développer avec Alfred Galichon et Victor Chernozhukov les techniques de transport optimal pour des problèmes d'inférence, en particulier la régression de quantiles multivariée [A244], [A241].

Julien CLAISSE a proposé une variante du problème de jeux à champ moyen dans lequel le nombre de joueurs peut évoluer au cours du jeu. L'objectif est de permettre le développement d'applications en dynamique des populations. Il a démontré l'existence d'un équilibre en utilisant la formulation relaxée des problèmes de contrôle stochastique [A307]. Il a développé une méthode de Monte Carlo pour la résolution numérique d'EDP non-linéaire. Cette approche repose sur une nouvelle représentation probabiliste de type Feynman-Kac par des processus de branchement diffusion et des formules de différentiation automatique [A18]. Il a aussi étudié un problème de valorisation robuste d'options exotiques de type corridor variance swap. En utilisant la théorie de transport optimal sous contrainte martingale, il a déterminé les prix de sur-réplication et de sous-réplication de ces options indépendamment du modèle. Actuellement, il travaille sur un problème d'optimisation champ moyen motivé par la calibration de réseaux de neurones. En régularisant le problème par l'information de Fisher, il a construit un flot de distribution qui converge vers la solution optimale et qui s'interprète comme un flot de gradient. L'essentiel du travail de Rose-Anne DANA a porté sur la gouvernance d'entreprise, avec une asymétrie d'information entre manager et actionnaires, qui peuvent avoir des croyances hétérogènes [A98], [A97].

Christophe DUTANG a proposé dans [A189] des formules explicites pour l'estimateur de maximum de vraisemblance des GLM, ainsi que les lois exactes des estimateurs pour deux lois (Pareto 1 et log-normal) afin de fournir des intervalles de confiance plus précis. L'obtention d'une formule fermée permet un gain substantiel en temps de calcul. Ces résultats ont été poursuivis dans [A400] pour les arbres GLM qui sont largement utilisés dans les méthodes de machine Learning actuelles. [A711] a établi des résultats d'un jeu répété non coopératif modélisant les stratégies d'assureurs non-vie. Partant d'une situation strictement régulé pour laquelle le comportement asymptotique a été étudié, des résultats basés sur les ordres stochastiques ont été établis permettant la compréhension des équilibres calculées dans le jeu répété en l'absence de régulation. Ce jeu répété non-coopératif rejoint la longue liste de jeux proposés en actuariat vie et non-vie. [A798] ont proposé une comparaison exhaustive des méthodes machine learning en vogue par rapport aux GLMs classiquement utilisés en actuariat.

Dans un premier article avec Delphine Lautier et Bertrand Villeneuve, Ivar EKELAND a construit un modèle où coexistent un marché spot et un marché à terme pour une matière première, le blé par exemple. Le premier est un marché physique, (on achète et on vend du blé), le second est un marché financier (on achète et on vend des futures). C'est la première fois que l'on construit un modèle où coexistent producteurs, stockeurs (dans les marchés de matière première, les stocks jouent un rôle important) et spéculateurs (qui n'interviennent que sur le marché financier). Il y montre l'existence d'équilibres ayant diverses caractéristiques. Dans un second article, les auteurs étendent l'analyse à une infinité de périodes et trouvent des stratégies markoviennes d'équilibre. Ils retrouvent des faits stylisés bien connus, comme le fait que la volatilité des prix est plus grande quand les stocks sont bas.

Avec Brian Wright Wolfram Schenkler et Peter Tankov, Ivar EKELAND a étendu le modèle classique de Hotelling sur l'exploitation d'une ressource non renouvelable au cas où la ressource en question, loin d'être immédiatement à disposition comme dans Hotelling (cake-eating problem), doit être découverte avant de pouvoir être exploitée : le pétrole ne git pas sur le sol en grands lacs qu'il suffit de pomper, il est caché dans des gisements qu'il s'agit de découvrir. Les résultats contredisent l'analyse de Hotelling : les auteurs montrent que les réserves prouvées augmentent au fur et à mesure que la ressource s'épuise, et que la tendance du prix ne monte pas. Il n'y a pas de signal-prix.

Enfin, Ivar EKELAND propose dans un travail en collaboration avec Clémence Alasseur, Romuald Élie, Nicolás, Hernández Santibáñez, et Dylan Possamaï [A24] une approche par sélection adverse de la tarification du prix de l'électricité.

Sur les modèles à volatilité stochastique rugueuse, Paul GASSIAT a établi certaines propriétés théoriques [A468], obtenu des formules asymptotiques dans les régimes de faible maturité en combinant des techniques classiques de grandes déviations avec des méthodes de type trajectoires rugueuses [A444, A445], établi le taux de convergence faible pour les schémas numériques pour ces modèles (en obtenant des résultats assez surprenants, notamment le taux faible peut prendre au moins 3 valeurs différentes pour des choix de schémas naturels) [P115].

Pour les équations de Hamilton-Jacobi stochastiques, Paul GASSIAT obtient la propagation à vitesse finie dans le cas convexe, via une représentation réduite de la solution due à des annulations du semi-groupe [A470], le caractère bien posé du problème de Neumann, et son application à un mouvement par courbure moyenne stochastique dans un domaine cylindrique [P118], l'étude du comportement en temps long de ces équations (dans le cas de domaine compact) dans certains régimes [P116]. Dans tous ces articles il obtient des comportements nouveaux par rapport au cas déterministe.

Paul GASSIAT caractérise une solution du problème de plongement de Skorokhod pour des processus de Markov généraux, via la théorie du potentiel [A472]; il a obtenu un contre-exemple montrant la non-unicité pour des équations différentielles réfléchies dès que le bruit est plus irrégulier qu'un mouvement brownien classique [A467]; enfin il a montré la régularisation d'équations réfléchies par un bruit additif fractionnaire [P117].

Quentin GUIBERT a proposé avec F. Planchet, et en partant de la description de l'état de santé d'un assuré au travers d'un modèle multi-états non-markovien, des estimateurs directs et non-paramétriques de probabilités de transition d'intérêts pour la tarification ou le provisionnement de contrats d'assurance. L'article décrit leurs propriétés asymptotiques et présente des applications en assurance dépendance. Dans [A400], il a proposé une amélioration d'une méthode de partitionnement récursif appelée MOB (*Model-Based trees*) mise en œuvre par Zeileis, Hothorn et Hornik (2008). Il s'est focalisé sur un cas particulier appelé arbre GLM où il introduit des estimateurs explicites afin de bénéficier d'une formule fermée pour la log-vraisemblance maximale, et donc de gain de temps de calcul, dans la recherche du découpage optimal de la base selon une variable de partitionnement donnée. Ces gains permettent la mise en œuvre de forêts GLM, qui peuvent être plus performantes que les forêts aléatoires usuelles et les CFO-REST (construites à partir de l'algorithme CTREE). Pour les modèles de mortalité, il introduit dans [A498] un nouveau type de modèle de projection de la mortalité, utilisant une approche VAR (*Vector Autoregressive Model*) en grande dimension. La spécification proposée permet de mieux tenir compte de la structure de dépendance "age-temps" reliant les taux de mortalité. Pour traiter le problème de sur-paramétrisation qui apparaît compte tenu de la forte corrélation des séries, nous estimons ce modèle VAR à partir d'une technique de régression *elastic-net*. L'utilisation de cette technique nous permet d'obtenir de très bonnes performances en termes d'adéquation aux données et de bonnes performances comparées aux modèles traditionnels en termes de prédictibilité. Elle permet d'offrir un cadre relativement souple et performant pour la projection de la mortalité humaine.

Les contributions principales de Marc HOFFMANN sont diverses. Sur la modélisation des prix multivariés à travers les échelles et leur inférence statistique : estimation efficace de la volatilité à plusieurs facteurs [A432]; l'estimation minimax optimale du taux de saut rapides de retour à la moyenne dans des modèles de diffusion [A359]. Sur l'estimation minimax optimale du taux de mort dans des modèles démographiques via des limites grandes populations de processus de vie et mort : l'étude optimale d'un modèle permettant l'adjonction de données de mortalité et de naissance permet de mettre en place des jalons rigoureux expliquant les effets cohortes en démographie humaine [A162, A163]. Enfin, il a montré dans [P78] comment estimer de manière efficace la volatilité rugueuse dans plusieurs situations, étendant ainsi l'optimalité de la vitesse de reconstruction $n^{-1/(4H+2)}$ au domaine où H est petit.

Les contributions d'Elyès JOUINI sur la période peuvent être regroupés en 4 thèmes principaux. (1) Irrationalité, hétérogénéité, formation des croyances et impact sur les marchés : il s'agit de questionner le principe des anticipations homogènes et rationnelles [A62], et de comprendre comment cette hétérogénéité des croyances impacte le marché [A97, A98, A558]. (2) Décision et santé : [A562] considère un modèle théorique de croyances et de comportements en matière de santé qui prend explicitement en compte l'impact émotionnel des mauvaises nouvelles possibles (maladie), ex-ante sous forme d'anxiété et ex-post sous forme de déception. (3) Femmes et science : [A561] construit un modèle théorique de choix et croyances prenant en compte des considérations d'ego et d'estime de soi. [A181] analyse les données de cinq enquêtes PISA successives et nous montrons que plus un pays est inégalitaire en termes économiques, plus la performance des filles par rapport aux garçons se détériore. [A182] propose une mesure de la prévalence et de l'étendue de l'internalisation du stéréotype selon lequel "les mathématiques ne sont pas pour les filles" au niveau national. (4) Histoire contemporaine de la Tunisie (entre 1850 et 1950) : réédition des mémoires de Mohamed-Salah Mzali, docteur en droit, homme de lettres, historien, franc-maçon révoqué par Vichy, et ancien Président du Conseil (1954), dans la succession d'événements ayant conduit à l'indépendance tunisienne.

Emmanuel LEPINETTE a développé avec des co-auteurs de nouveaux résultats en Théorie des Ensembles Aléatoires dans un espace de Banach. Il s'agit d'ensembles aléatoires conditionnés selon une filtration complète (dans l'esprit des espérances conditionnelles mais pour d'autres opérateurs). C'est complètement nouveau et cela correspond aux articles publiés [A615] et [A669]. Il a appliqué ces nouveaux résultats afin de proposer des méthodes implémentables d'évaluation des prix d'options en temps discret grâce à des principes de programmation dynamique. Cela concerne notamment des modèles non convexes pour lesquels aucun résultat n'existait dans la littérature. Il s'agit des articles publiés [A216, A614, A616, A620].

Concernant les modèles de jeux à champ moyen, un des principaux résultats obtenus par Pierre-Louis LIONS sur la période est l'existence de solutions pour des problèmes avec bruits communs (système MFG et master equation) et l'utilisation de la master equation pour prouver la convergence des systèmes de Nash à N joueurs vers la solution de la master equation [O4]. Il a également étudié les MFG dans lesquels le comportement de chaque agent dépend de l'action moyenne des autres agents, ainsi que la nature du bruit dans les problèmes discrets [A93]. Il a introduit la notion de MFG étendus, classe très large de systèmes comprenant les MFG classiques et les systèmes de conditions d'optimalité pour le contrôle des champ moyen, qui permettent de décrire les limites de problèmes d'homogénéisation de systèmes MFG ou le contrôle optimal de processus conditionnés [A12]. Il s'est intéressé aux MFG de type Stackelberg avec un joueur majeur [A94], ainsi qu'à des problèmes de planning via la master equation [A92] et aux questions de réductions de dimension en MFG. Enfin, il a utilisé le formalisme MFG pour l'étude de modèles classiques d'agents hétérogène en économie [A11] ainsi de questions liées au stockage spéculatif du pétrole [A10]. Il a également introduit une nouvelle approche pour analyser la dynamique du spectre de grandes matrices aléatoires en introduisant dans le domaine des outils de Hamilton-Jacobi non locales [A91].

Yating LIU a d'abord étudié la caractérisation de la mesure de probabilité par la fonction d'erreur de quantification. [A659] étudie la consistance et la vitesse de convergence de la méthode de quantification quand la mesure de probabilité sous-jacente converge sous la distance de Wasserstein. D'autre part, [A660] et [A661] étudient l'ordre convexe et l'ordre convexe monotone des trajectoires de deux équations de McKean-Vlasov, ainsi que l'application au problème de contrôle stochastique et aux jeux à champ moyen. Dans [P160] sont étudiées 3 méthodes numériques ainsi que leur vitesses de convergence pour l'équation de McKean-Vlasov : la méthode de particule, un schéma de quantification récursive et un schéma hybride. Enfin, elle étudie une version généralisée de l'équation de McKean-Vlasov dont les coefficients dépendent du trajectoire entière et les distributions marginales jusqu'à présent. Il y est établi l'existence et l'unicité de solution, la propagation de chaos et la convergence d'un schéma d'Euler interpolé pour cette version.

Pendant cette période, Miquel OLIU BARTON a d'abord obtenu une caractérisation de la valeur limite d'un jeu stochastique à somme nulle [A41], problème ouvert depuis une quarantaine d'années, et résolu une conjecture de 2010 les concernant [A264]. Il a ensuite obtenu un algorithme pour calculer cette valeur, plus efficace que tous les algorithmes existant (Mathematics of Operations Research, 2021). Une connexion originale et inattendue entre les jeux stochastiques et les problèmes de valeurs propres multiples (i.e. une correspondance entre les solutions des deux problèmes) a donné lieu à un quatrième article [A721].

En ce qui concerne les politiques économiques et de santé, Miquel OLIU BARTON a d'abord proposé une stratégie de déconfinement progressif et par zones [A742]. Ensuite, il a contribué au débat public international concernant les arbitrages entre économie et santé, en montrant que pendant la première année de la pandémie les pays ayant adopté une approche de type élimination ont obtenu de meilleurs résultats en termes sanitaires, mais aussi économiques, et même quant au respect des libertés civiles [A722]. Il a ensuite refait l'analyse en présence des vaccins et conclut qu'un tel alignement ne tient plus [A723]. Puis, il a mesuré l'impact du pass sanitaire sur les taux d'adhésions au vaccin en France, en Allemagne, et en Italie, et mesuré leurs conséquences sur l'économie [A724]. Enfin, il a réuni un panel de 400 experts de 110 pays pour établir des conclusions et des recommandations faisant l'objet de consensus dans la gestion du COVID.

Les résultats principaux de Zhenjie REN sur la période portent sur les jeux à champ moyen avec branchement [A307] : il introduit le mécanisme de branchement à la population dans MFG afin de permettre à la taille de la population d'être dynamique. Il résout numériquement un exemple linéaire-quadratique et prouve l'existence d'équilibres de champ moyen dans un contexte plus général en utilisant un argument probabiliste. Il a aussi considéré le problème Principal-Agent avec plusieurs principaux [A538], et résout le problème dans le cas avec un nombre infini de principaux identiques. Il s'avère que les directeurs doivent résoudre un MFG pour trouver le contrat optimal. Il prouve également que le contrat optimal de champ moyen est I -optimal pour le jeu avec N (suffisamment grand) Principaux, en utilisant un argument de propagation du chaos rétrograde. Concernant le MFO régularisé par l'entropie [A536], il a introduit la dynamique dite de Langevin à champ moyen, une diffusion de McKean-Vlasov. Il prouve que ses lois marginales convergent vers le minimiseur de la MFO régularisée par l'entropie, en utilisant un argument de dissipation d'énergie et le principe d'invariance de Lassalle pour les systèmes dynamiques.

Gabriel TURINICI a continué ses activités numériques en "Mean Field Games" avec applications diverses [A414, A540, A810] : l'algorithme de convergence numérique vers la solution [A811] a nécessité un investissement théorique assez conséquent (équations d'évolutions sur les espaces métriques généraux) et reste à ma connaissance original en ce qui concerne le traitement d'une équation à potentiel dépendant du temps ; une des applications concerne le domaine large du pricing retail versus la stratégie optimale des firmes [A296]. Il a également produit quelques contributions en transport de masse dont notamment celle avec G. Legendre [A610]. Gabriel TURINICI a également travaillé dans ce qu'on appelle maintenant "machine learning" qui ont des applications, à venir, en pricing "model free" des produits dérivés et risk management; Gabriel TURINICI s'intéresse aux aspects numériques des réseaux dits "génératifs" (stabilités, utilisation des métriques particulières qui donnent une convergence plus aisée etc) [C5, C13, C70, C71, A812] ou statistique numérique plus générale [P211].

Dans [A797] Guillaume VIGERAL a étudié la représentation de jeux discrets en temps long vus comme des jeux joués continuellement sur l'intervalle de temps $[0,1]$ avec des joueurs jouant de plus en plus fréquemment. Il caractérise le comportement des stratégies optimales dans ce jeu continu dans le cas particulier de jeux absorbants, et montre que ce comportement est fondamentalement différent dans le cas fini et dans le cas plus général de jeux avec des ensembles d'actions compacts.

En théorie des jeux d'évolution, Yannick VIOSSAT a montré à l'aide de fonctions de Lyapunov appropriées que les stratégies pures strictement dominées par d'autres stratégies pures peuvent survivre pour de grandes classes de dynamiques d'imitation [A706]. En oncologie mathématique, il a établi des conditions suffisantes pour que des traitements visant à stabiliser la tumeur la contrôlent mieux que les traitements standards [A819], [P11]. Il a clarifié le rôle d'un coût de résistance au traitement et du taux de renouvellement des cellules tumorales, et collaboré à divers travaux sur l'optimisation de traitements anti-tumoraux en liaison avec le Moffitt Cancer Center (USA) et les projets européens FourCmodelling et EvoGamesPlus [A338, A799, P219]. Les techniques relèvent des jeux d'évolution, du contrôle optimal, des principes de comparaison, et de simulations numériques.

Bruno ZILIOTTO a utilisé les liens entre jeux en temps discret (jeux stochastiques), jeux différentiels et équations de Hamilton Jacobi (homogénéisation stochastique et méthode escomptée évanescence) pour résoudre plusieurs questions ouvertes portant sur l'étude asymptotique de ces modèles [A264, A832, A833]. L'originalité de cette approche porte sur l'utilisation d'une approche stratégique typique du temps discret pour étudier des edp. Il a également établi de nouveaux résultats de complexité des stratégies optimales dans les POMDPS [A287, A818], par une analogie discrète avec la théorie KAM faible. Enfin, il a amélioré la borne inférieure dans l'inégalité du prophète-secrétaire classique [A329].