

# **Spectre de grands graphes dilués mais touffus**

**Nathanaël Enriquez**  
**en collaboration avec Laurent Ménard**  
Modal'X Université Paris Ouest

# Graphes d'Erdős-Rényi

$G(n, p)$

- $n$  sommets  $\{1 \dots n\}$
- reliés indépendamment entre eux par une arête avec probabilité  $p$

# Graphes d'Erdős-Rényi

$G(n, p)$

- $n$  sommets  $\{1 \dots n\}$
- reliés indépendamment entre eux par une arête avec probabilité  $p$

Matrice d'adjacence  $A$

- symétrique
- si  $i \neq j$ ,  $A_{i,j} = 1$  ssi  $i \sim j$
- pour tout  $i$ ,  $A_{i,i} = 0$

# Graphes d'Erdős-Rényi

$G(n, p)$

- $n$  sommets  $\{1 \dots n\}$
- reliés indépendamment entre eux par une arête avec probabilité  $p$

Matrice d'adjacence  $A$

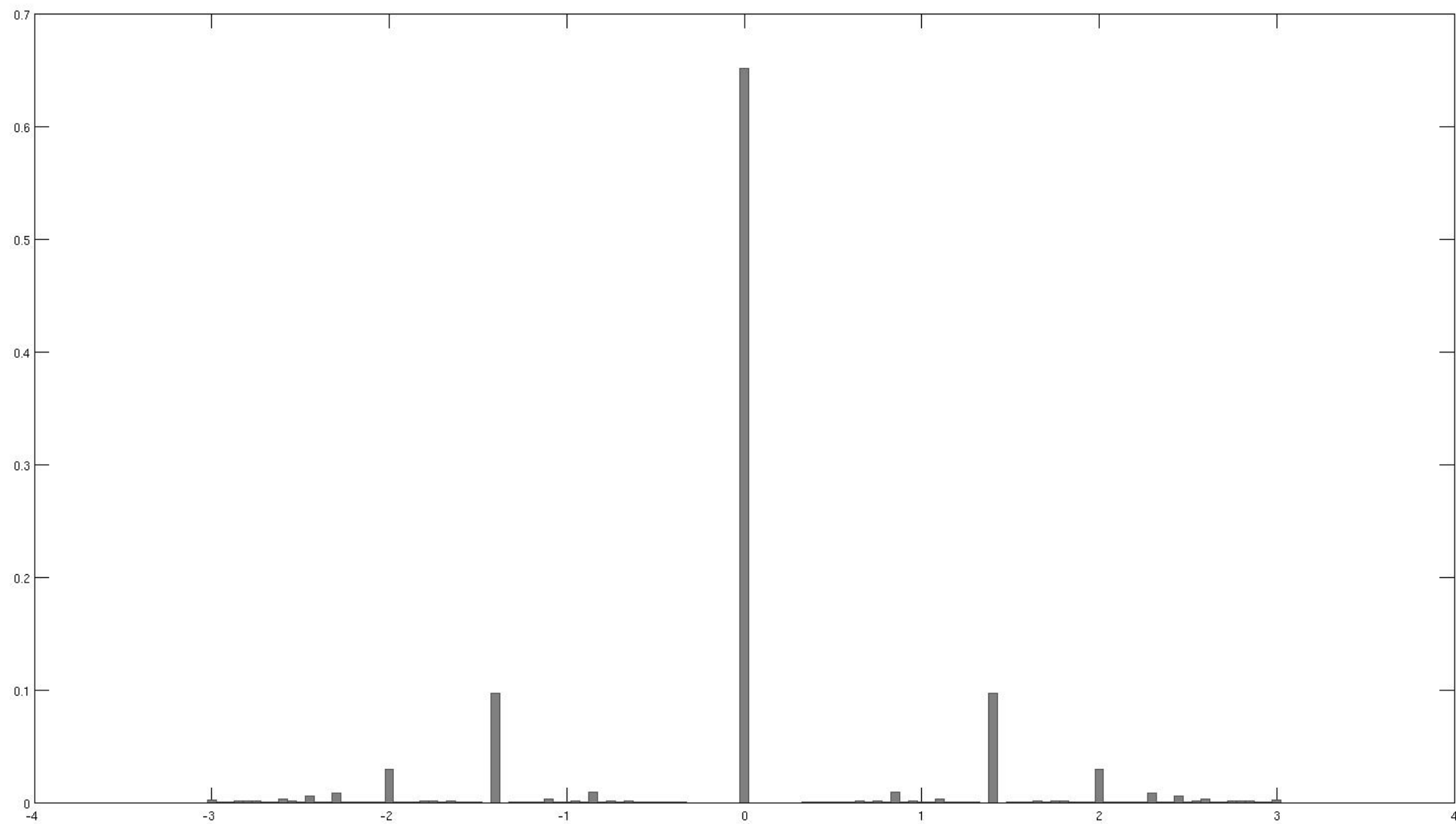
- symétrique
- si  $i \neq j$ ,  $A_{i,j} = 1$  ssi  $i \sim j$
- pour tout  $i$ ,  $A_{i,i} = 0$

**Question :** allure de la limite de la mesure empirique du spectre de  $A$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

- si  $np \rightarrow 0$ , Dirac en 0
- si  $np \rightarrow \infty$ , loi du demi-cercle
- if  $np \rightarrow c > 0$ , Aïe !

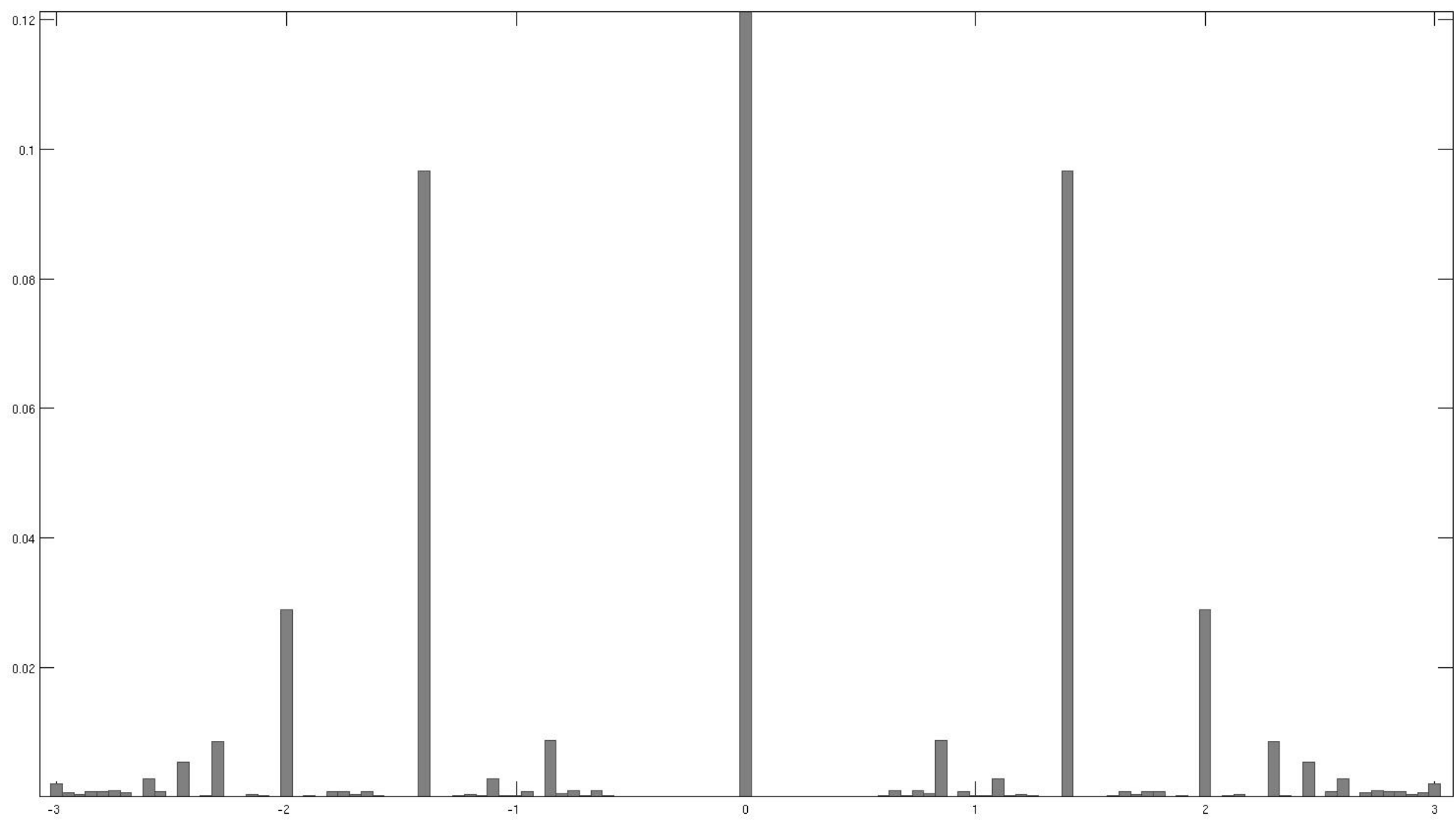
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 0,5$$



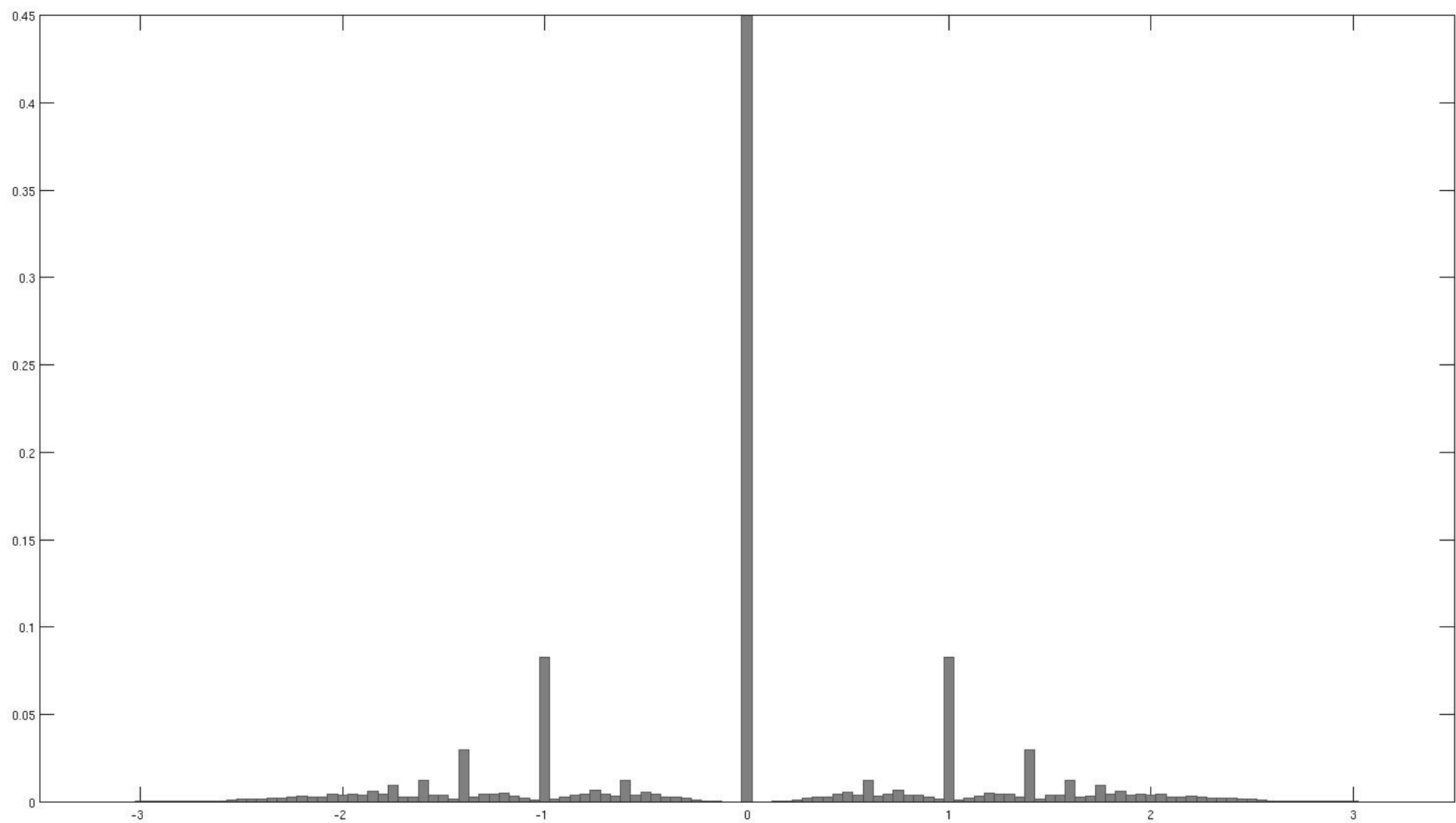
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$c = 0,5$  (Zoom)



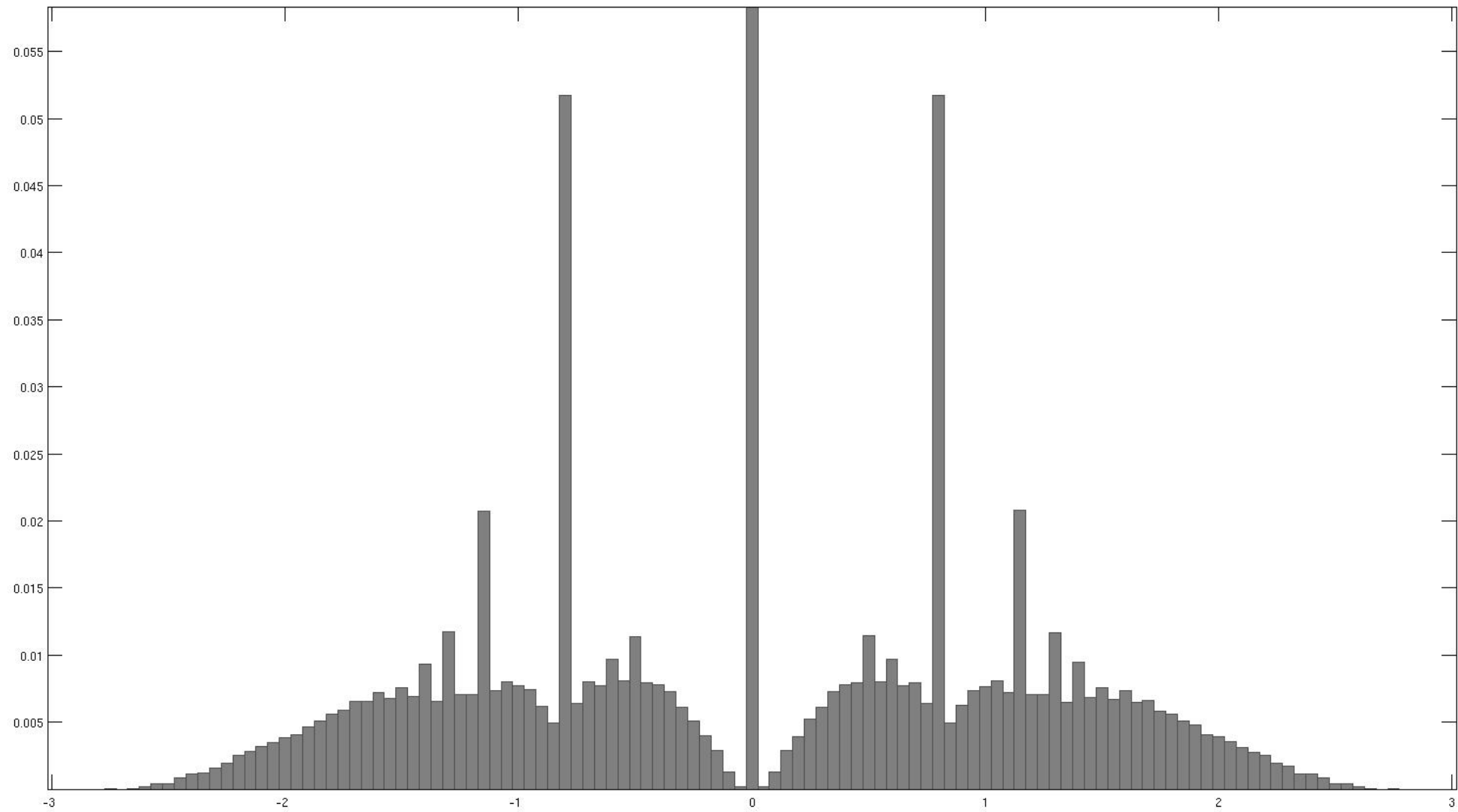
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 1$$



# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

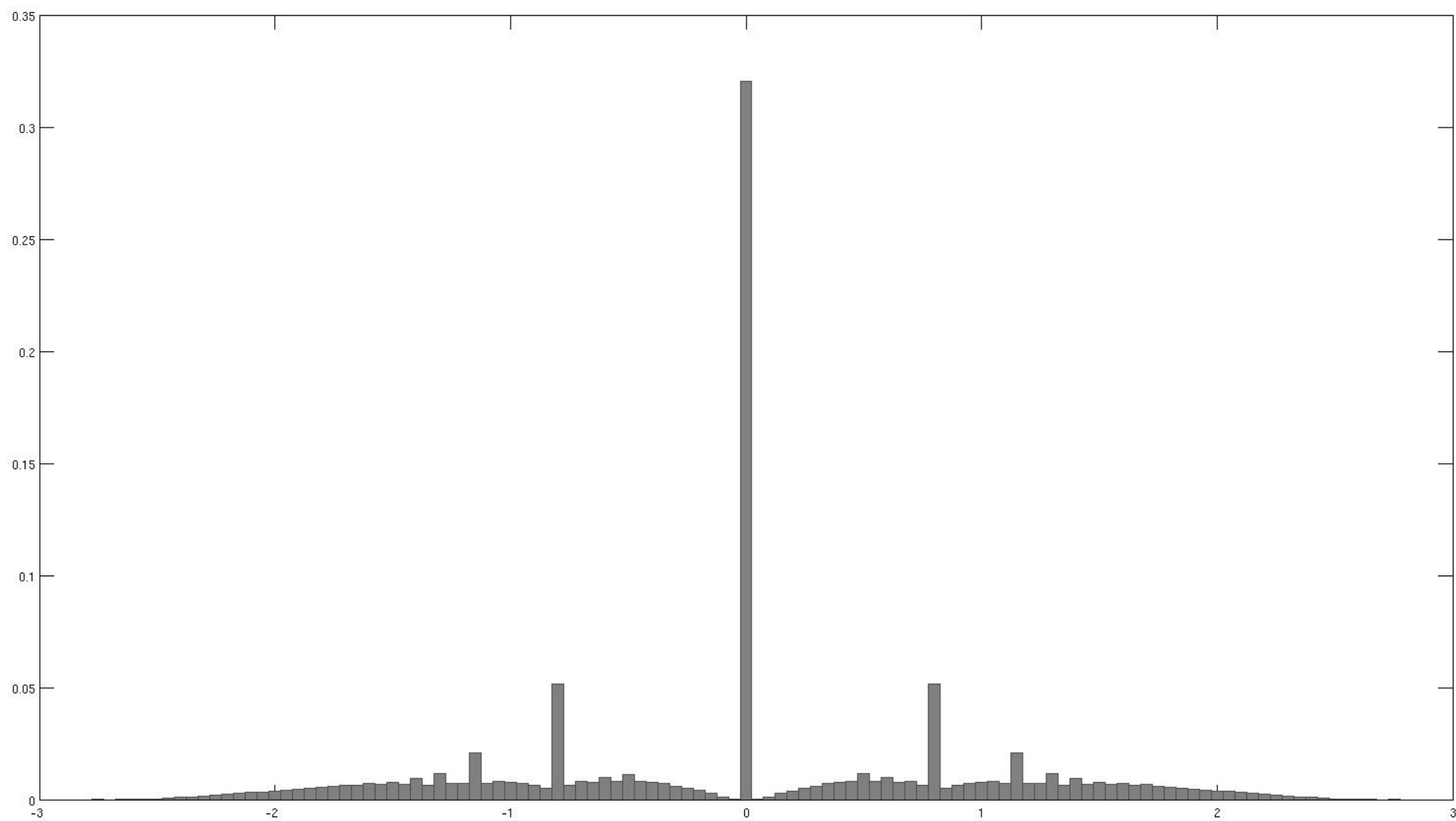
$c = 1$  (Zoom)





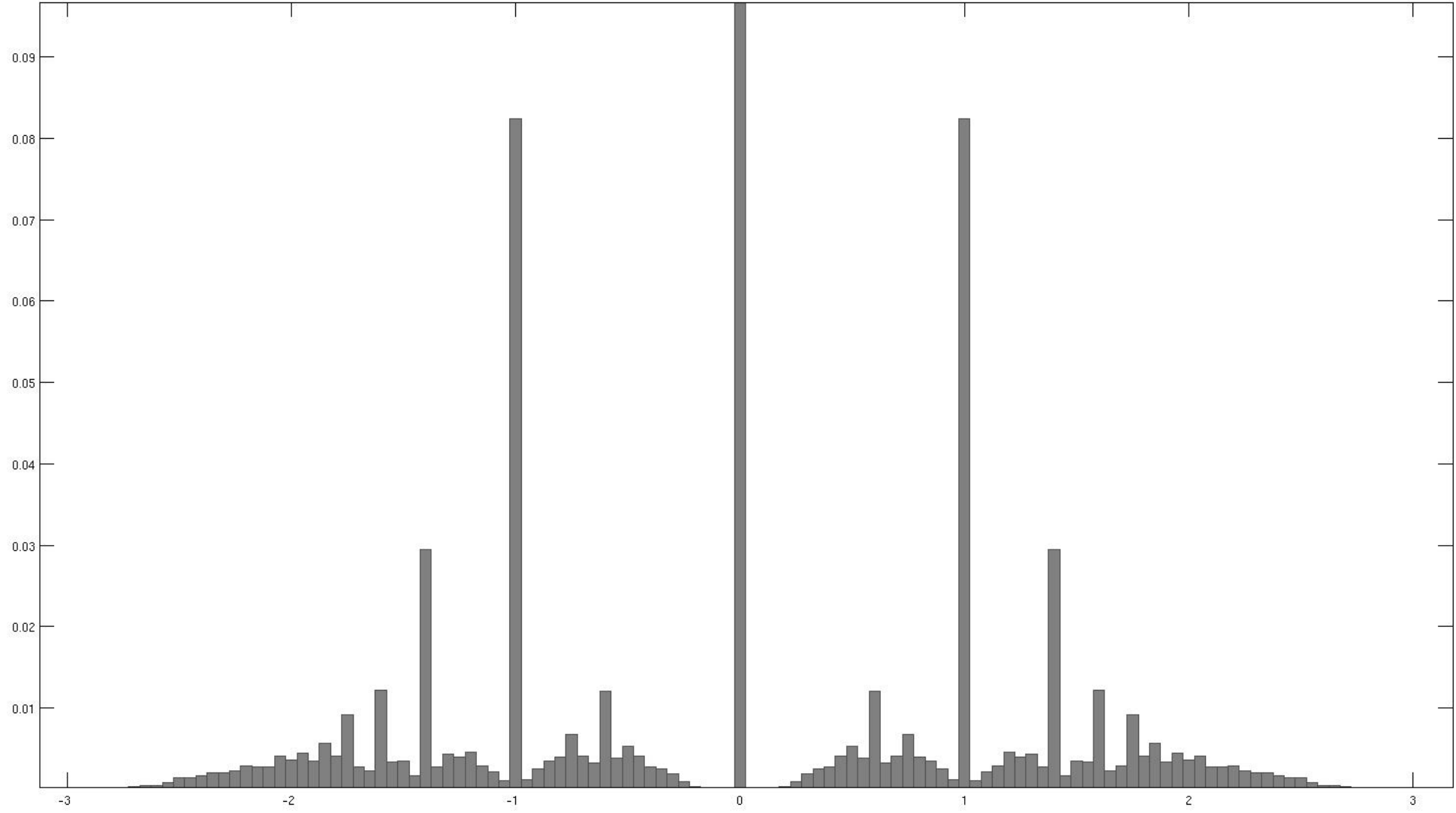
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 1,5$$



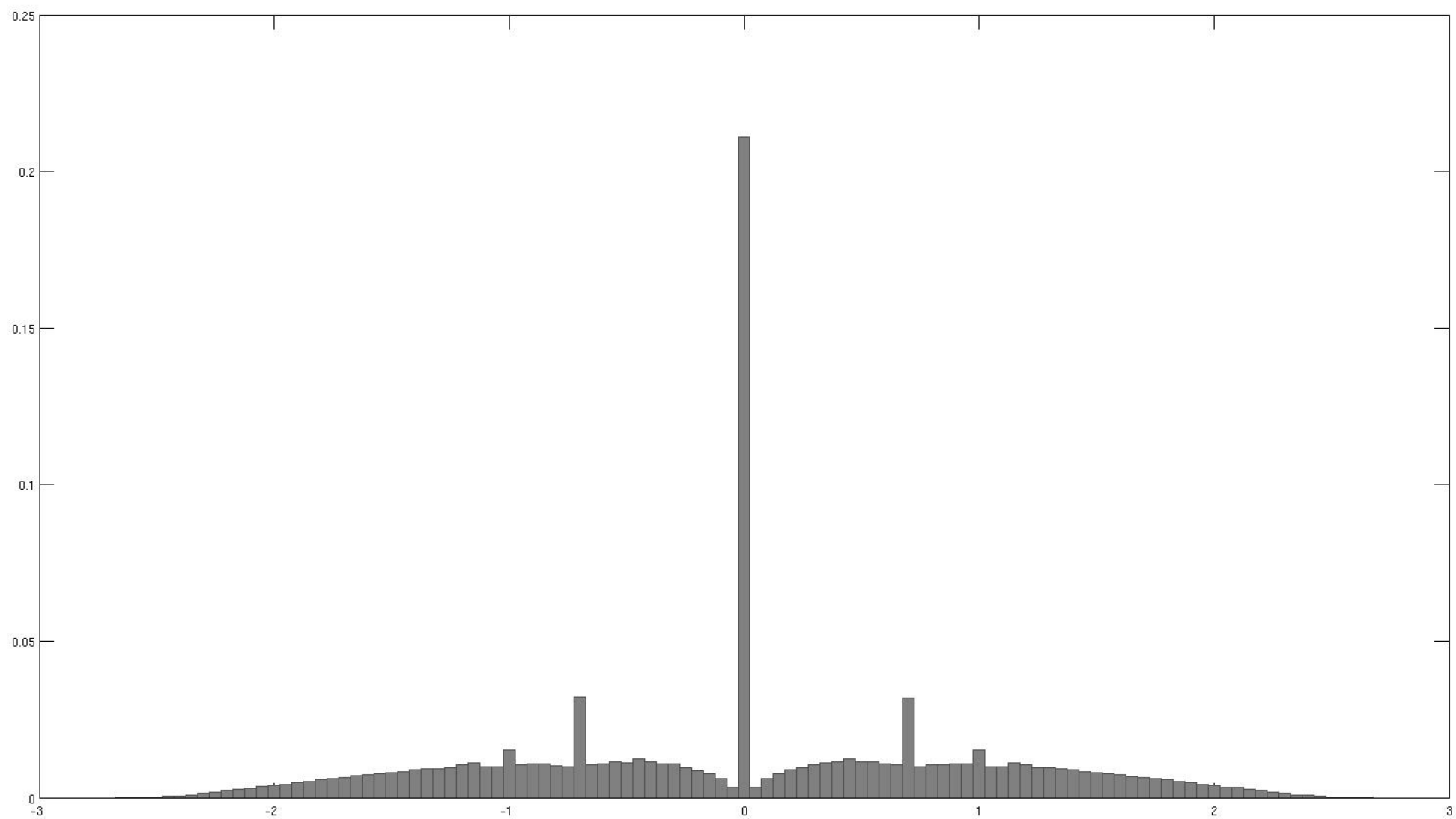
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$c = 1,5$  (Zoom)



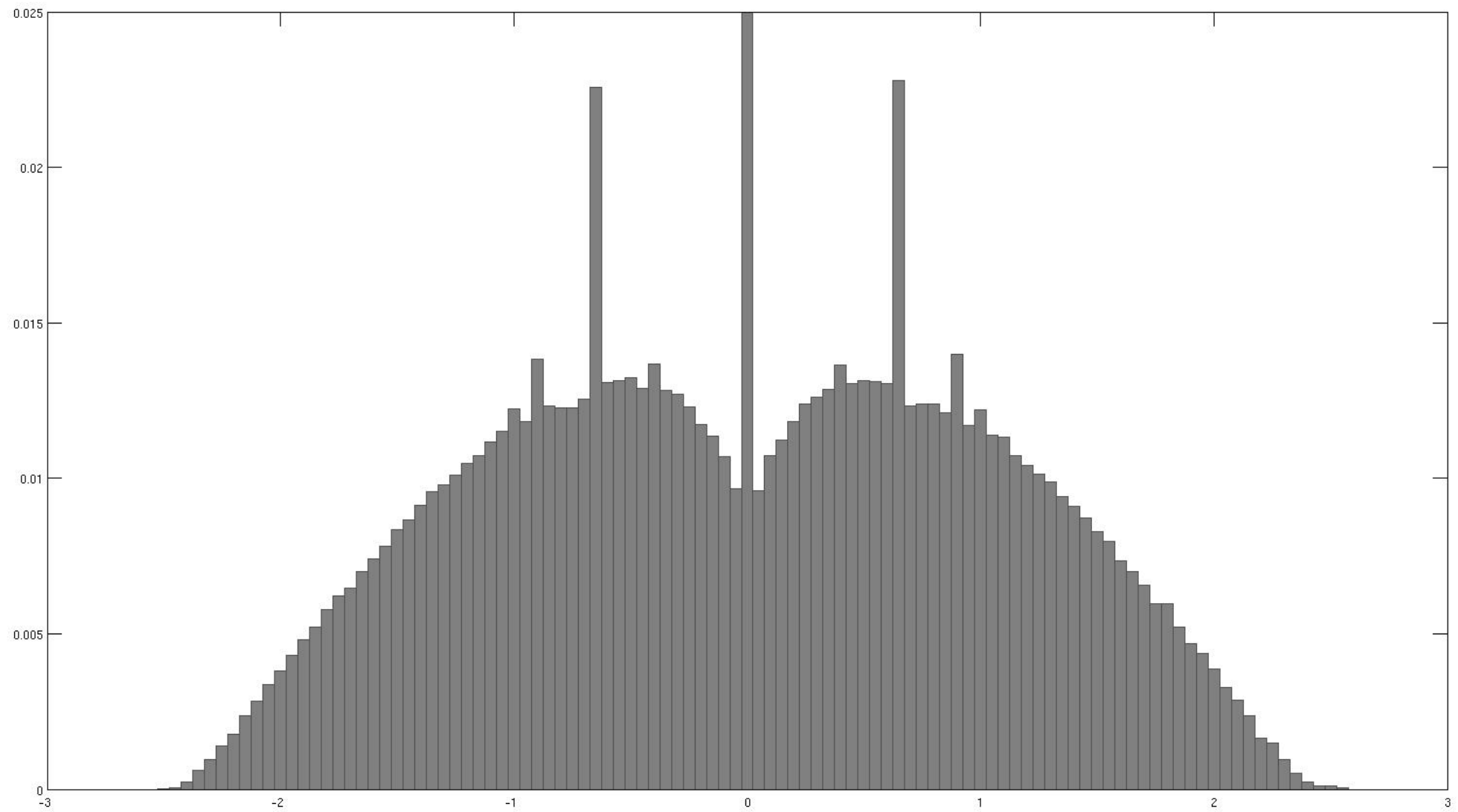
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 2$$



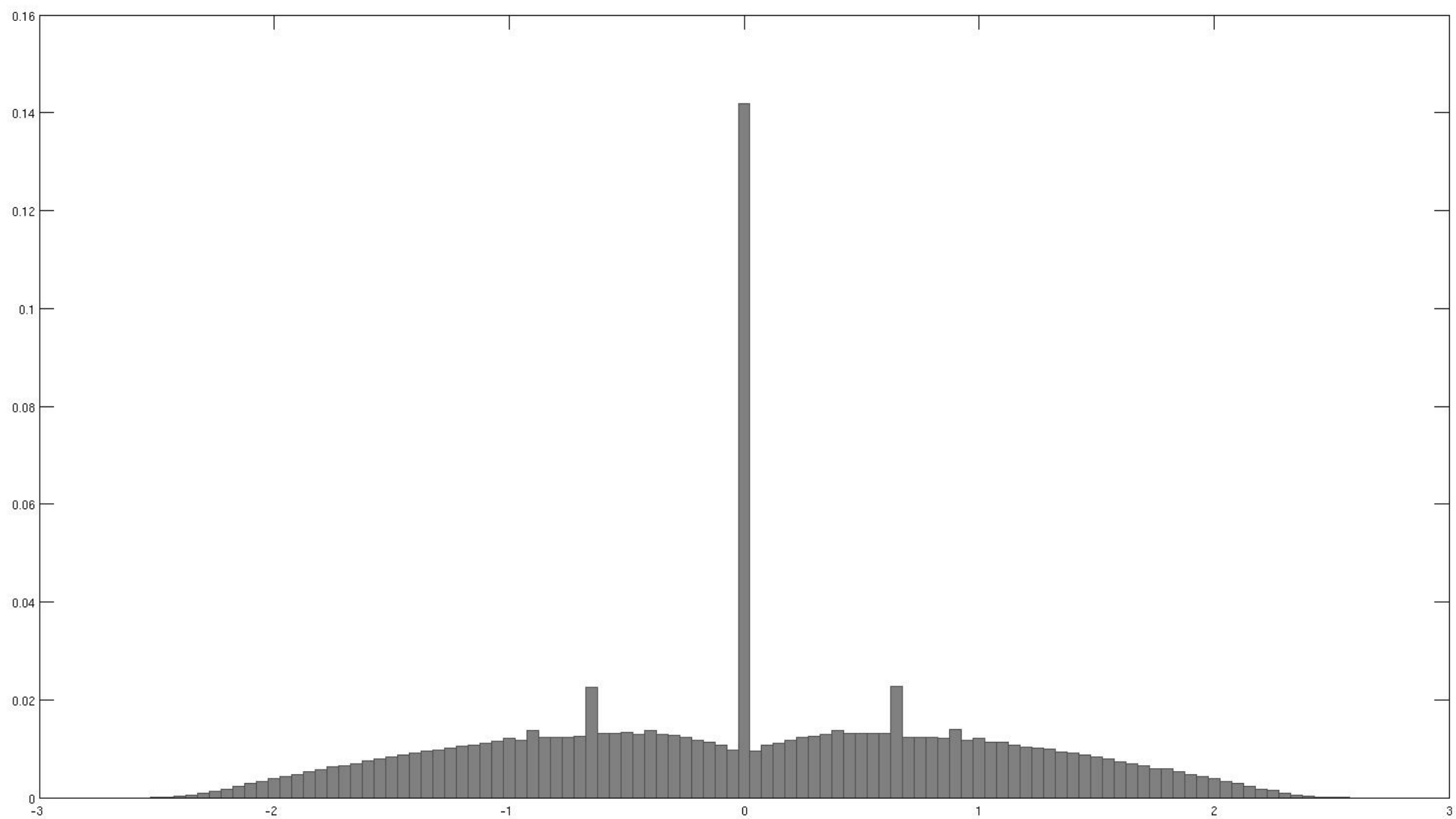
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$c = 2$  (Zoom)



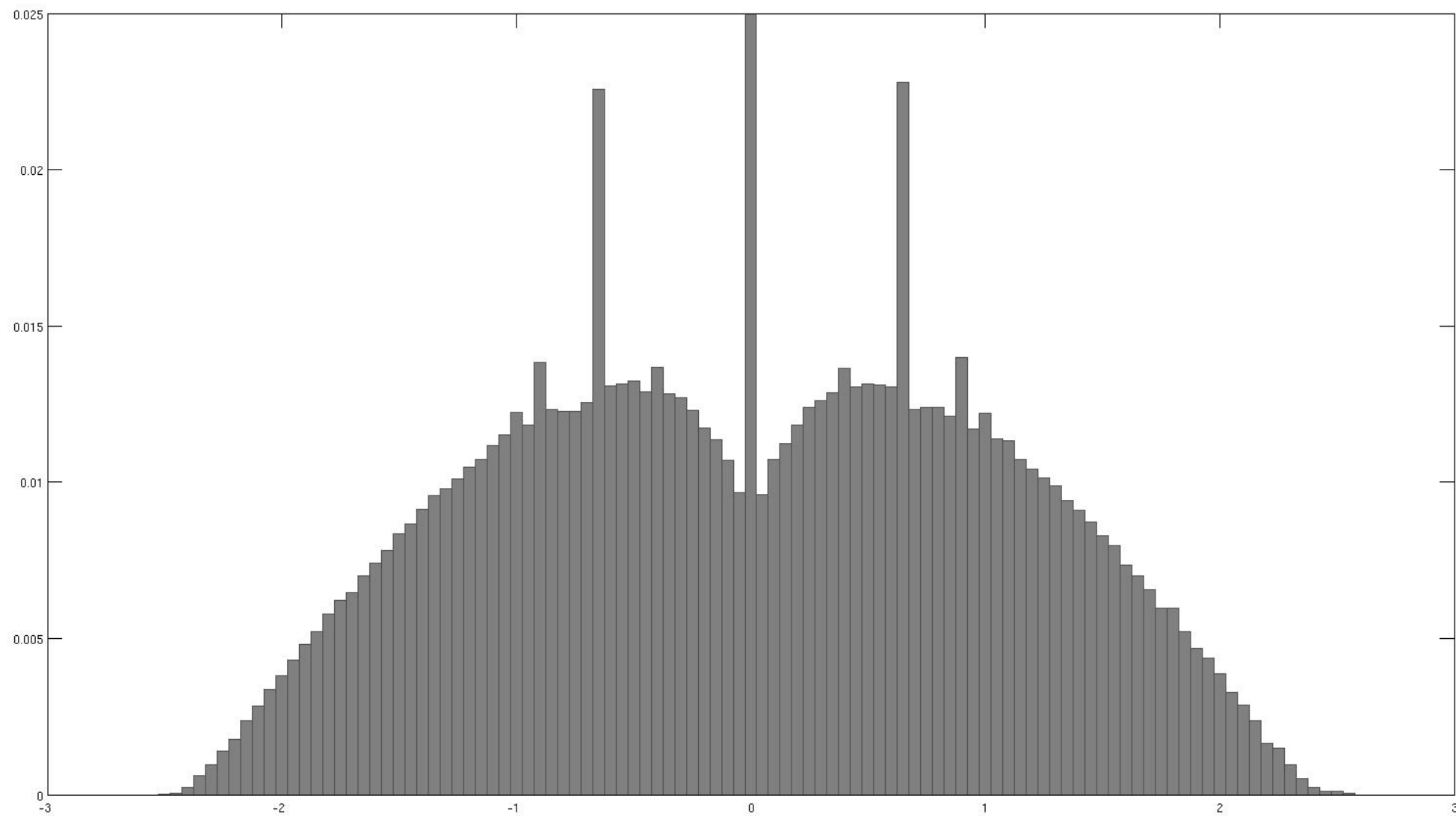
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 2,5$$



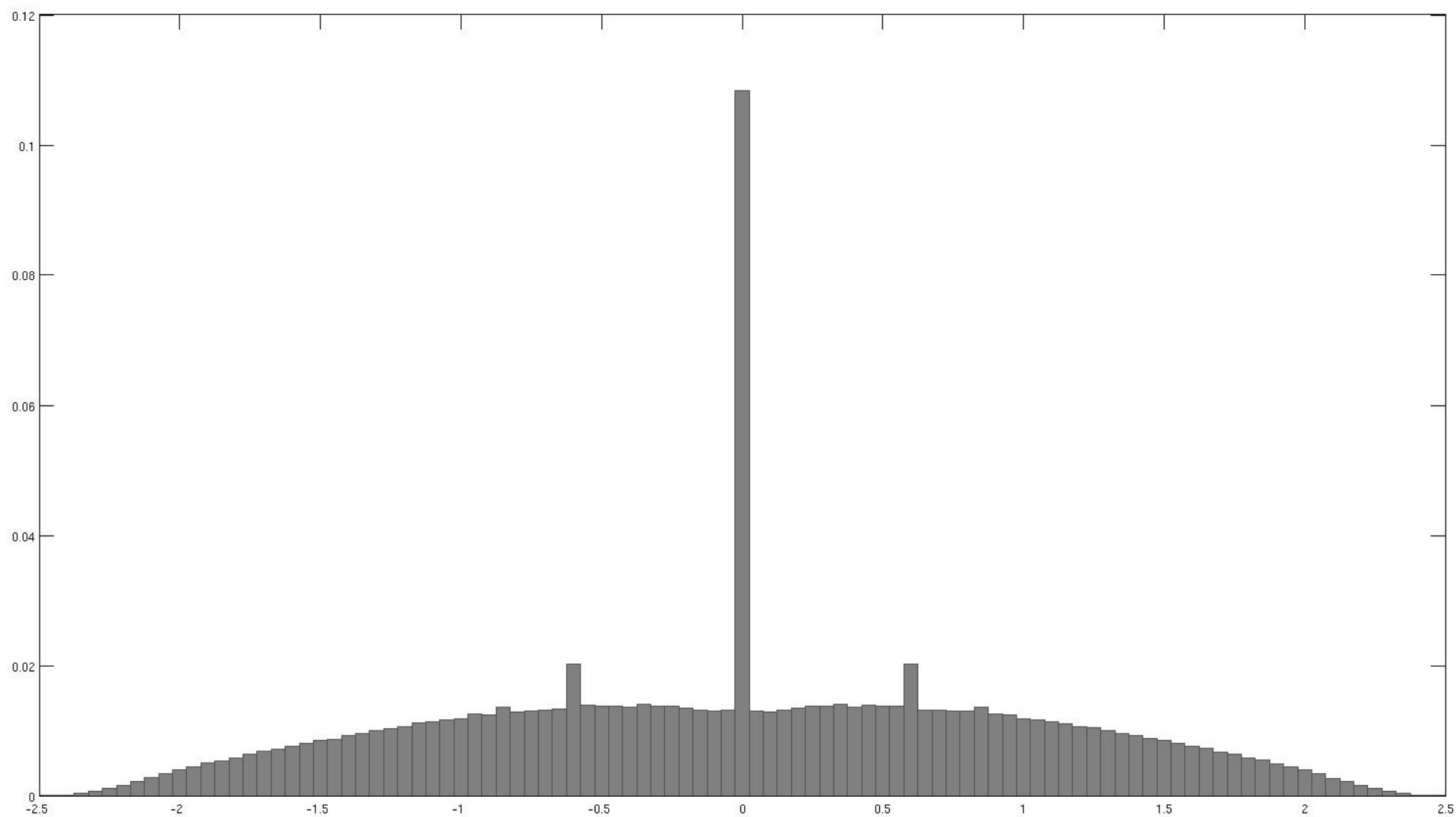
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$c = 2,5$  (Zoom)



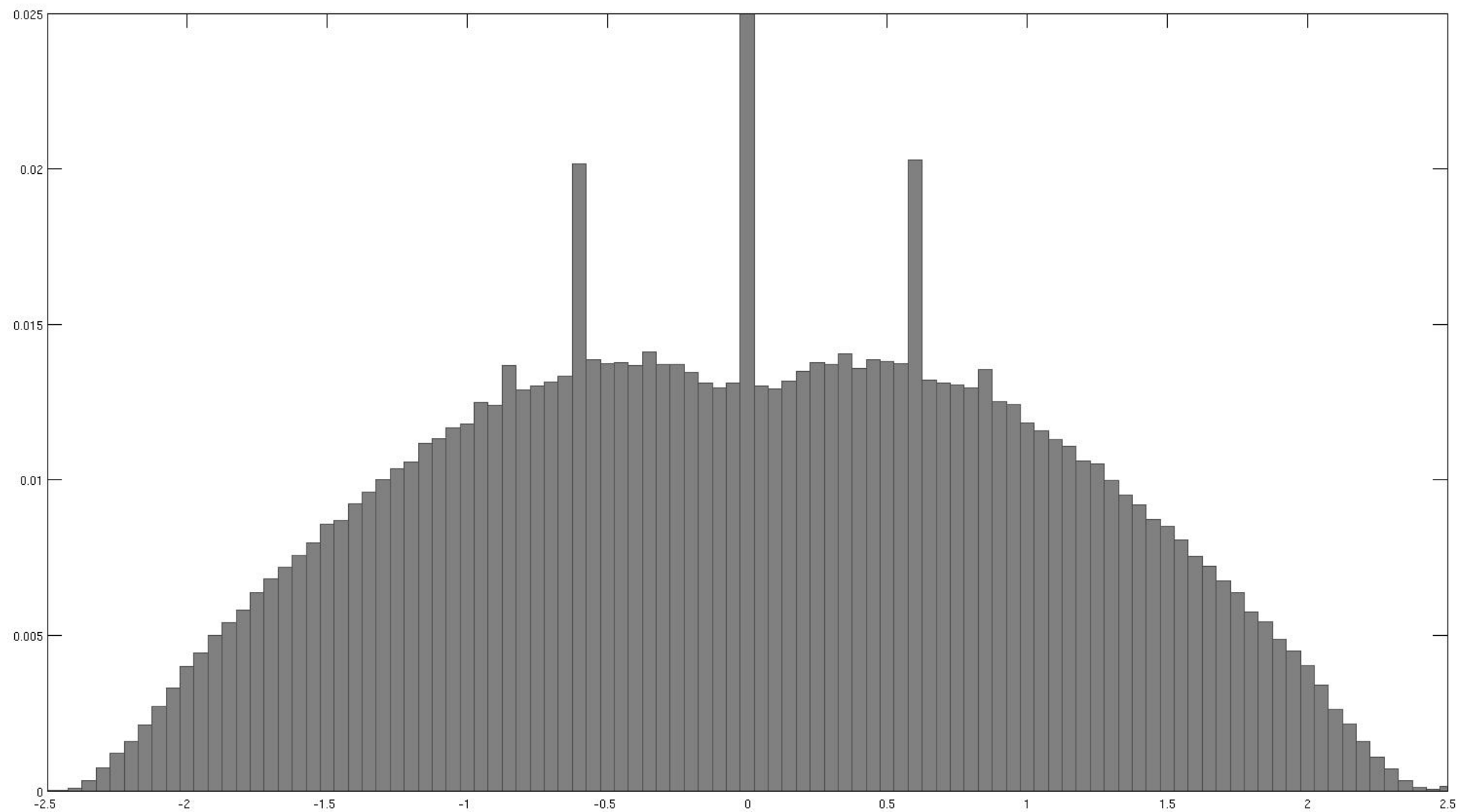
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 2,8$$



# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

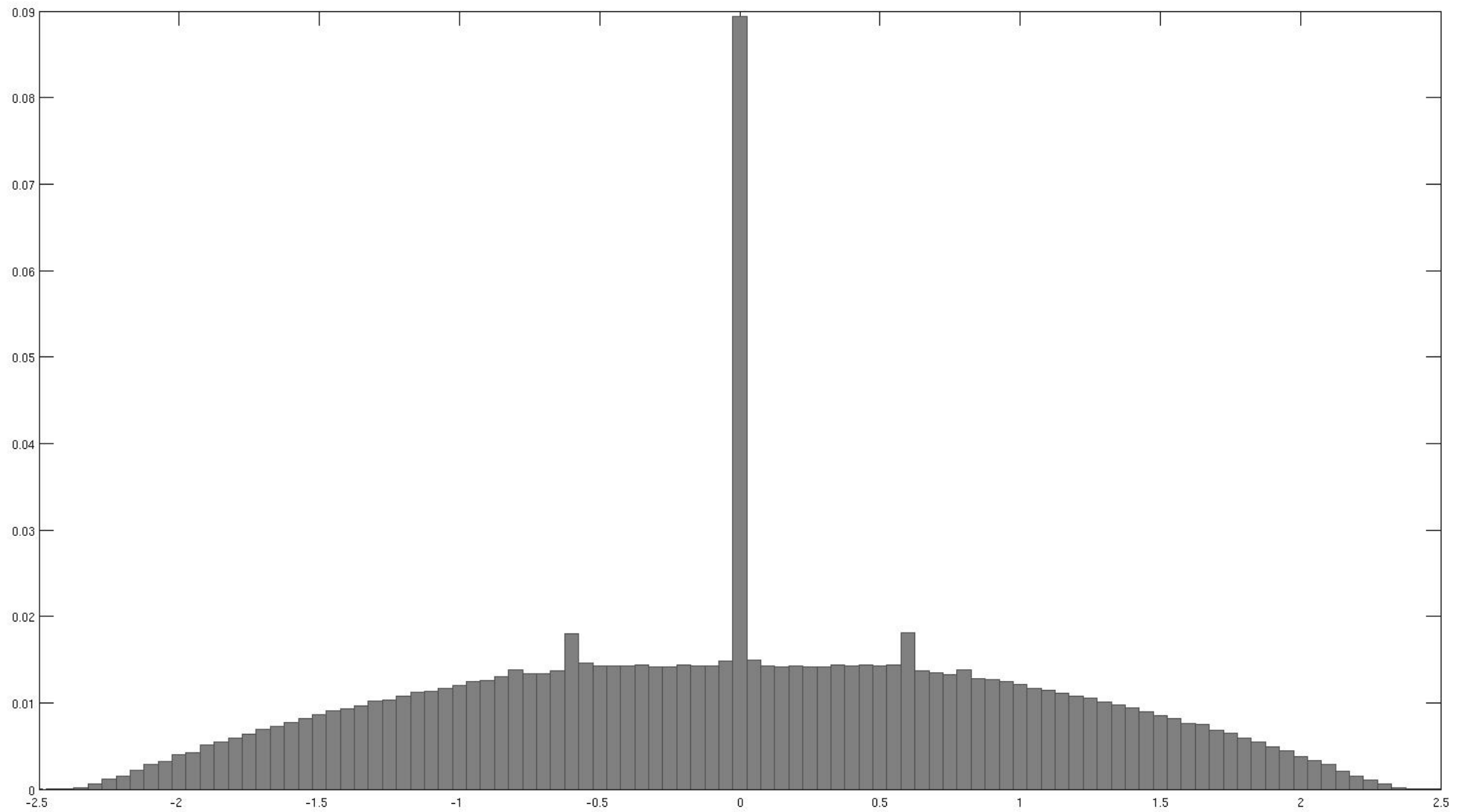
$c = 2,8$  (Zoom)





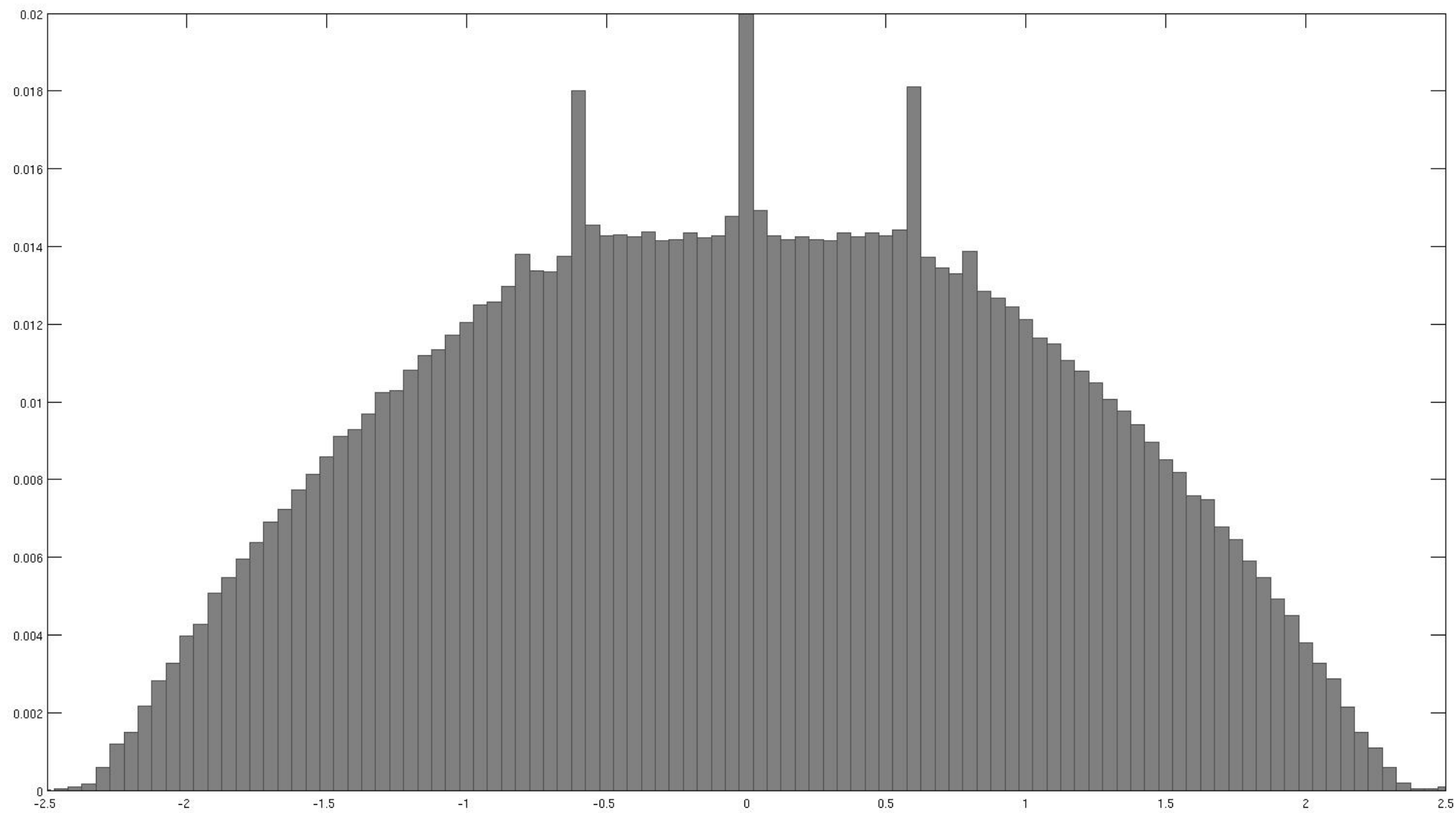
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 3$$



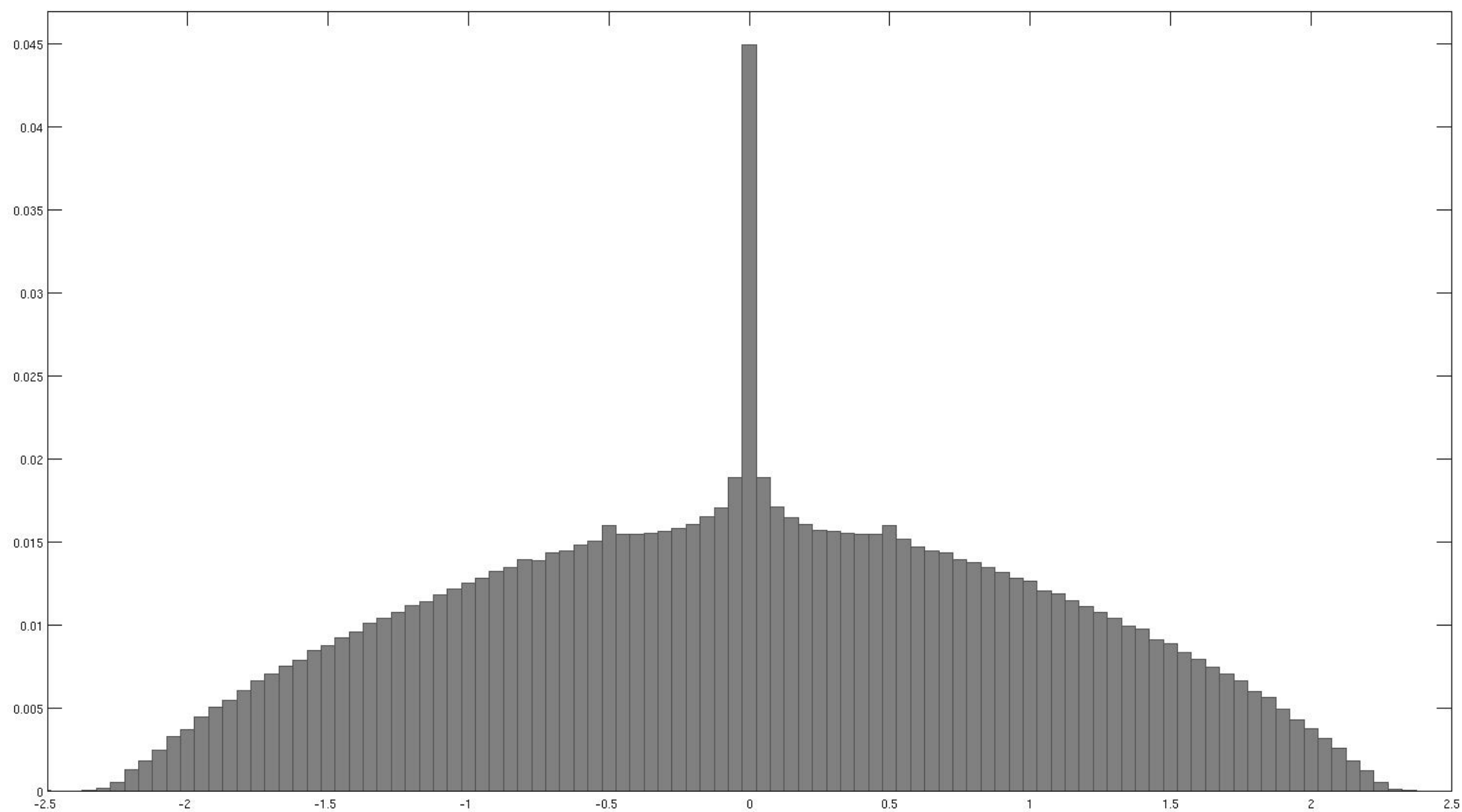
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$c = 3$  (Zoom)



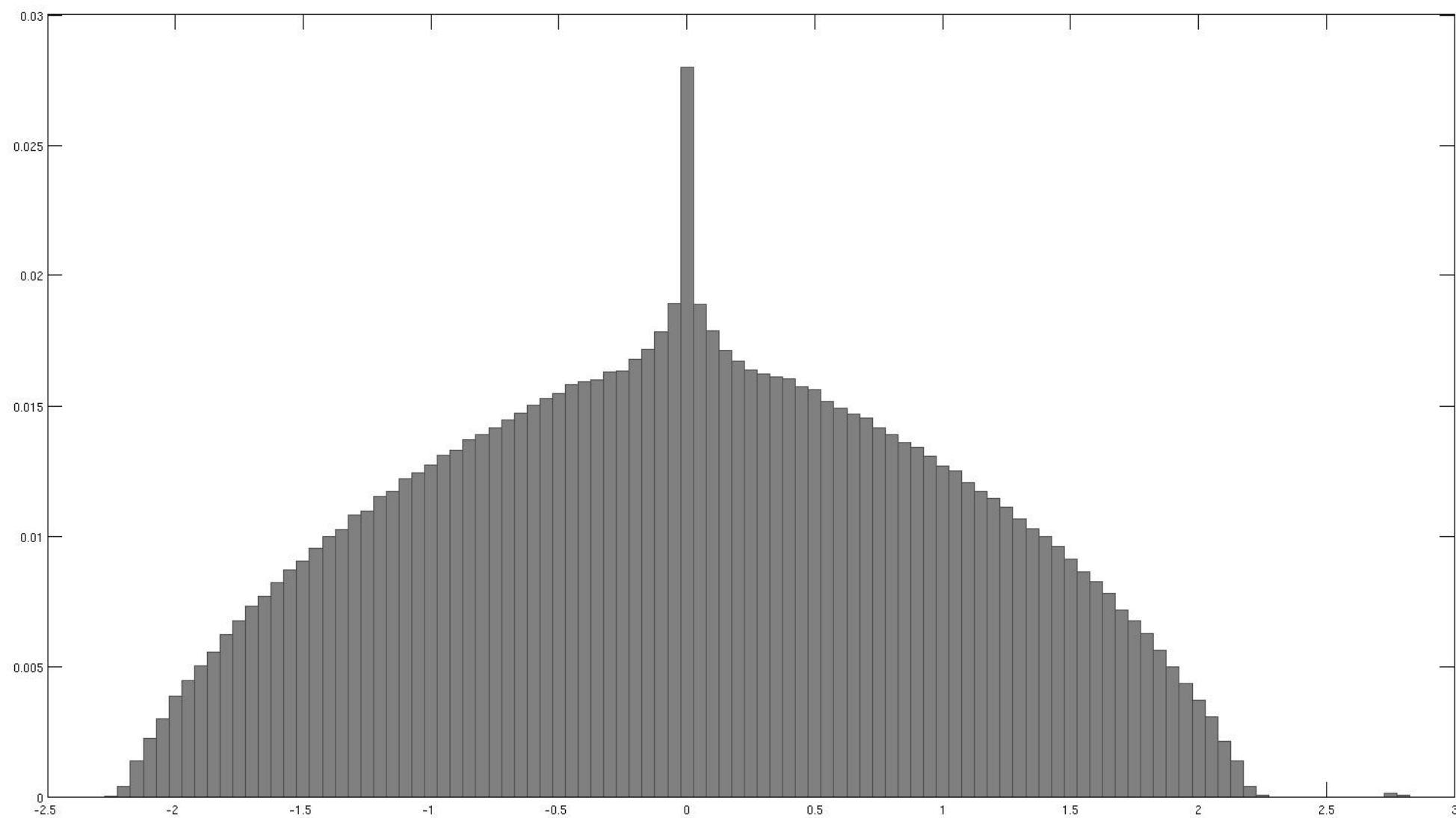
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 4$$



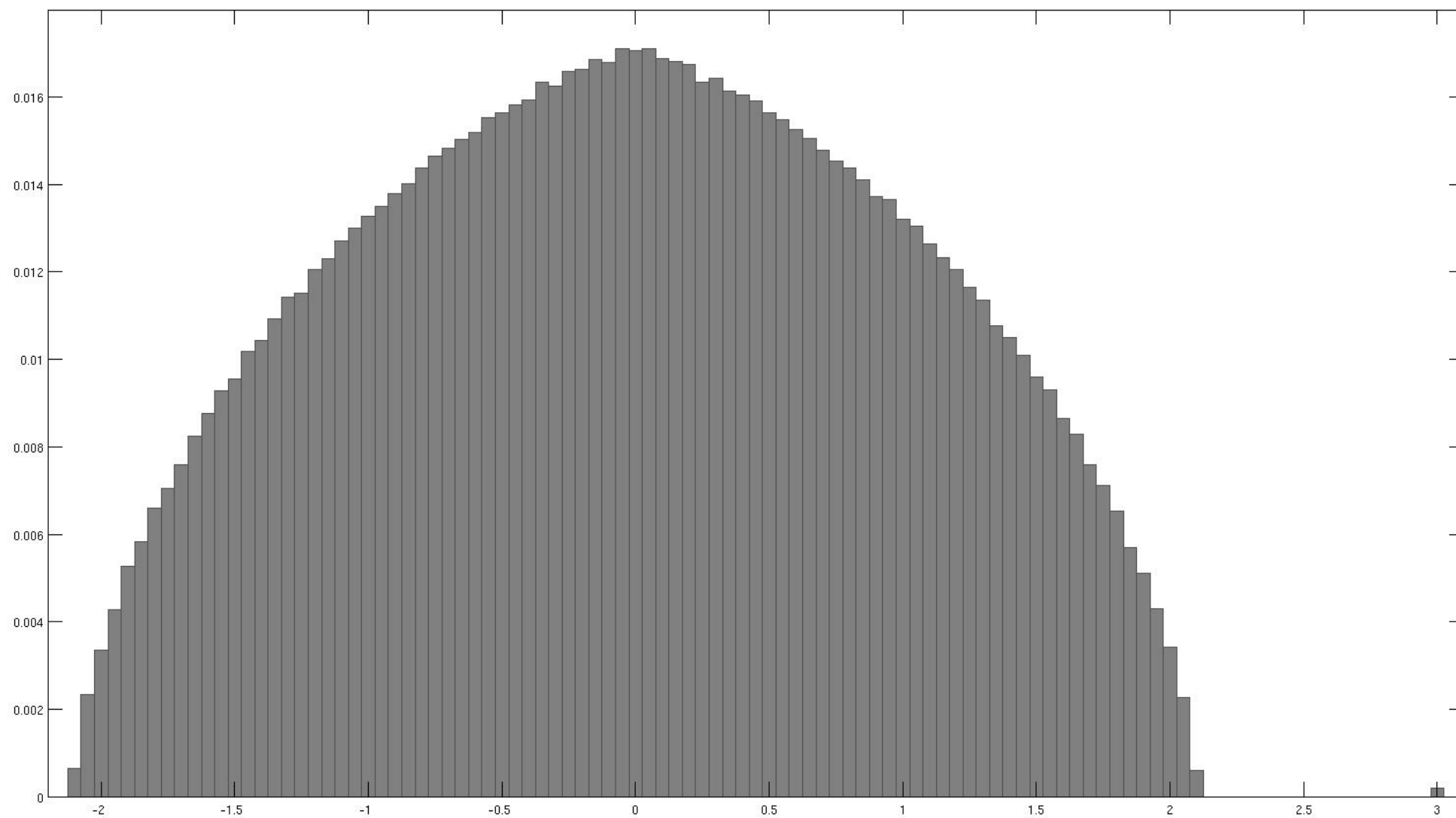
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 5$$



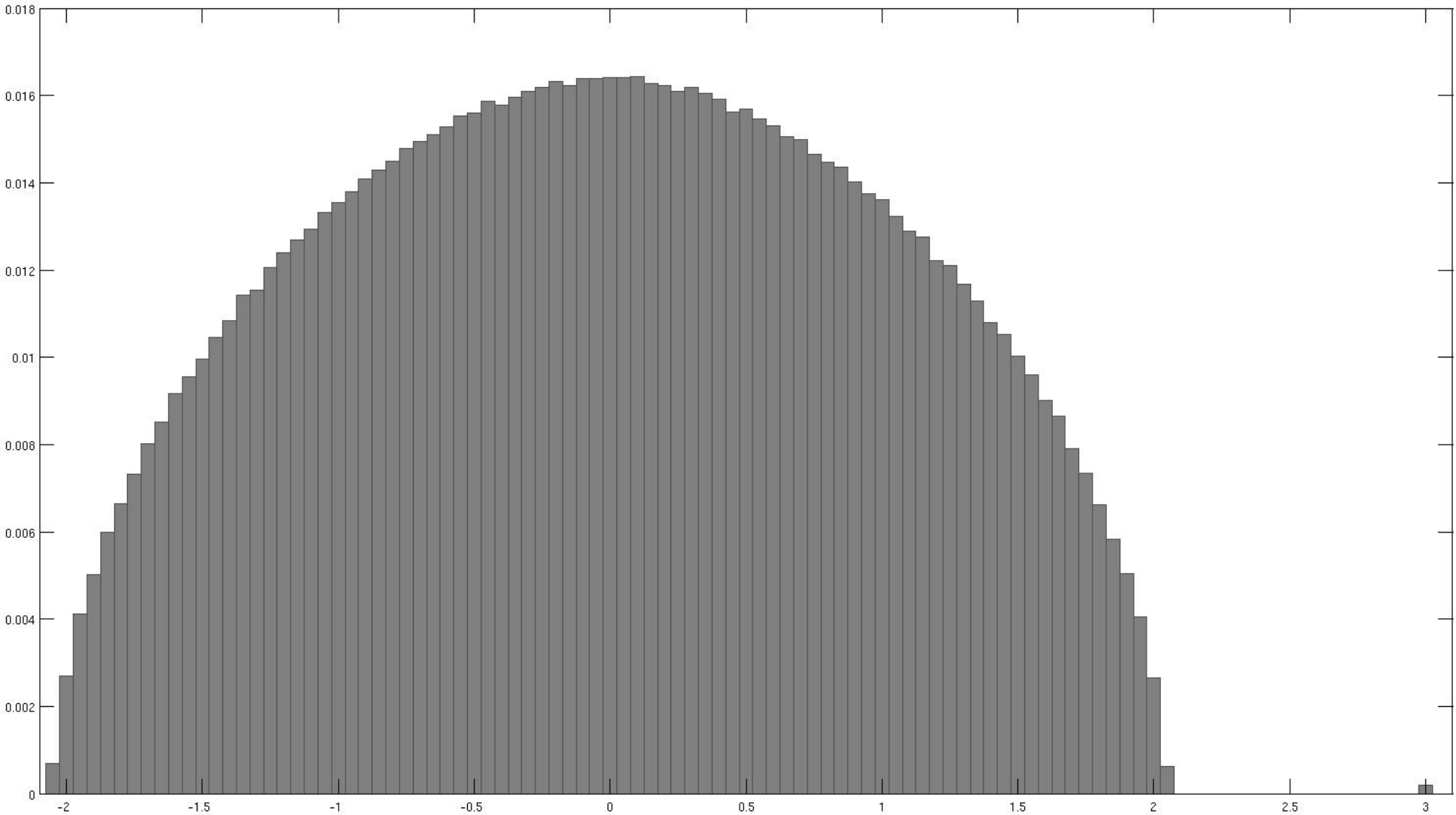
# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 10$$



# Simulations pour des graphes dilués ayant 5000 sommets

$$c = 20$$



# État de l'art

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(c^{-1/2} A)} \delta_\lambda : \text{mesure spectrale empirique de } G(n, c/n)$$

# État de l'art

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(c^{-1/2}A)} \delta_\lambda : \text{mesure spectrale empirique de } G(n, c/n)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n^c$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu^c$  [Zakharevich, 2006]



# État de l'art

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(c^{-1/2}A)} \delta_\lambda : \text{mesure spectrale empirique de } G(n, c/n)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n^c$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu^c$  [Zakharevich, 2006]

Propriétés de  $\mu^c$ :

- lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,  $\mu^c$  converge faiblement vers la loi du demi-cercle de Wigner de densité  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{[-2,2]}$ .
- Support non borné
- Ensemble dense d'atomes

# État de l'art

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(c^{-1/2}A)} \delta_\lambda : \text{mesure spectrale empirique de } G(n, c/n)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n^c$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu^c$  [Zakharevich, 2006]

Propriétés de  $\mu^c$ :

- lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,  $\mu^c$  converge faiblement vers la loi du demi-cercle de Wigner de densité  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{[-2,2]}$ .
- Support non borné
- Ensemble dense d'atomes
- $\mu^c(\{0\})$  est explicite [Bordenave, Lelarge, Salez 2011]

# État de l'art

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(c^{-1/2}A)} \delta_\lambda : \text{mesure spectrale empirique de } G(n, c/n)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n^c$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu^c$  [Zakharevich, 2006]

Propriétés de  $\mu^c$ :

- lorsque  $c \rightarrow \infty$ ,  $\mu^c$  converge faiblement vers la loi du demi-cercle de Wigner de densité  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{[-2,2]}$ .
- Support non borné
- Ensemble dense d'atomes
- $\mu^c(\{0\})$  est explicite [Bordenave, Lelarge, Salez 2011]
- $\mu^c$  n'est pas purement atomique ssi  $c > 1$  [Bordenave, Sen, Virag 2013]

# Développement asymptotique de la limite de la mesure empirique du spectre

# Développement asymptotique de la limite de la mesure empirique du spectre

Si  $\mu$  est une mesure signée t.q.  $\int |x|^k |d\mu(x)| < \infty$ , on note

$$m_k(\mu) = \int x^k d\mu(x)$$

# Développement asymptotique de la limite de la mesure empirique du spectre

Si  $\mu$  est une mesure signée t.q.  $\int |x|^k |d\mu(x)| < \infty$ , on note  $m_k(\mu) = \int x^k d\mu(x)$

**Théorème:** Pour tout  $k \geq 0$ , lorsque  $c \rightarrow \infty$

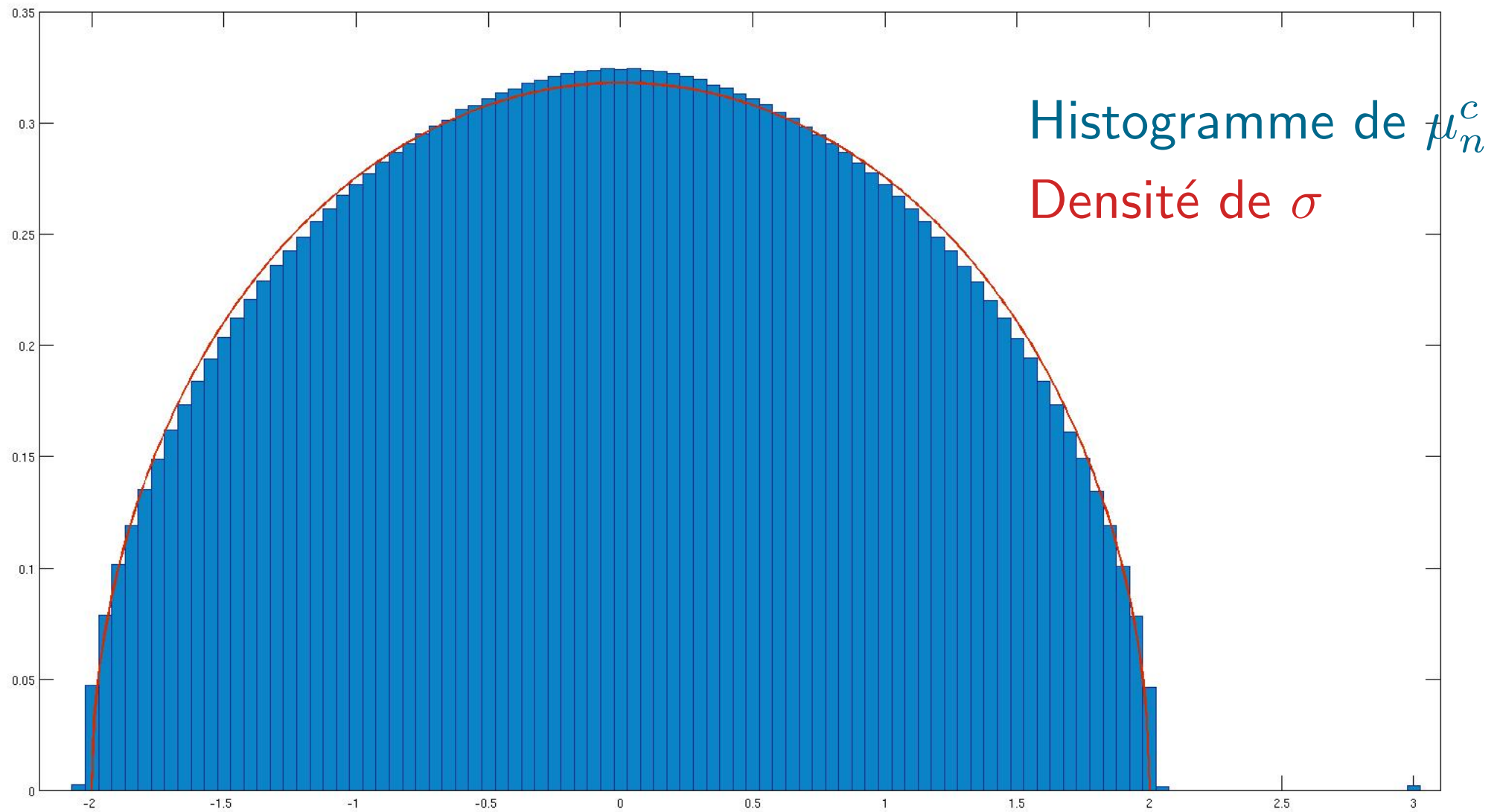
$$m_k(\mu^c) = m_k(\sigma) + \frac{1}{c} m_k(\sigma^{\{1\}}) + o\left(\frac{1}{c}\right)$$

où  $\sigma$  désigne la loi du demi-cercle de densité  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{|x| < 2}$   
et  $\sigma^{\{1\}}$  est la mesure de masse totale 0 et de densité

$$\frac{1}{2\pi} \frac{x^4 - 4x^2 + 2}{\sqrt{4 - x^2}} \mathbf{1}_{|x| < 2}.$$

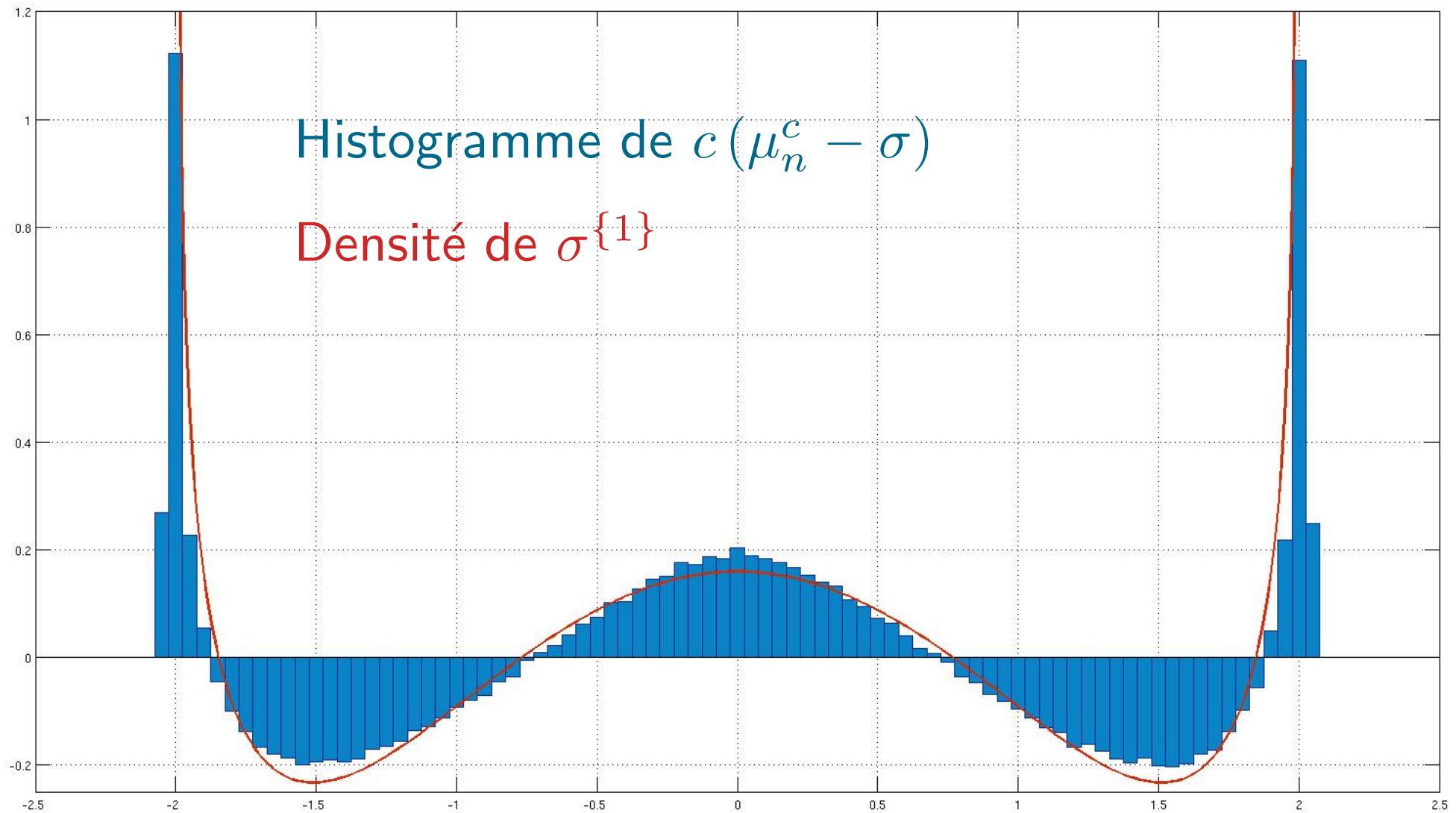
# Simulations

100 matrices de taille 10000 avec  $c = 20$



# Simulations

100 matrices de taille 10000 avec  $c = 20$





## Développement de la limite de la mesure spectrale: ordre 2 (I)

**HIC** : Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$m_k(\mu^c) = m_k(\sigma) + \frac{1}{c}m_k(\sigma^{\{1\}}) + \frac{1}{c^2}d_k + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

où les nombres  $d_k$  ne forment **PAS** la suite des moments d'une mesure !

## Développement de la limite de la mesure spectrale: ordre 2 (I)

**HIC** : Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$m_k(\mu^c) = m_k(\sigma) + \frac{1}{c} m_k(\sigma^{\{1\}}) + \frac{1}{c^2} d_k + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

où les nombres  $d_k$  ne forment **PAS** la suite des moments d'une mesure !

→ *Explication :*

$$\mu^c(\mathbb{R} \setminus [-2; 2]) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

## Développement de la limite de la mesure spectrale: ordre 2 (I)

**HIC** : Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$m_k(\mu^c) = m_k(\sigma) + \frac{1}{c} m_k(\sigma^{\{1\}}) + \frac{1}{c^2} d_k + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

où les nombres  $d_k$  ne forment **PAS** la suite des moments d'une mesure !

→ *Explication :*

$$\mu^c(\mathbb{R} \setminus [-2; 2]) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

On définit un opérateur de dilatation  $\Lambda_\alpha$  sur les mesures défini par  $\Lambda_\alpha(\mu)(A) = \mu(A/\alpha)$  pour toute mesure  $\mu$  et tout borélien  $A$ .

## Développement de la limite de la mesure spectrale: ordre 2 (I)

**HIC** : Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$m_k(\mu^c) = m_k(\sigma) + \frac{1}{c}m_k(\sigma^{\{1\}}) + \frac{1}{c^2}d_k + o\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

où les nombres  $d_k$  ne forment **PAS** la suite des moments d'une mesure !

→ *Explication* :

$$\mu^c(\mathbb{R} \setminus [-2; 2]) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

On définit un opérateur de dilatation  $\Lambda_\alpha$  sur les mesures défini par  $\Lambda_\alpha(\mu)(A) = \mu(A/\alpha)$  pour toute mesure  $\mu$  et tout borélien  $A$ .

Ainsi,  $\Lambda_\alpha(\sigma)$  a pour support  $[-2\alpha; 2\alpha]$ .

## Développement de la limite de la mesure spectrale: ordre 2 (II)

**Théorème :** Pour tout  $k \geq 0$ , lorsque  $c \rightarrow \infty$

$$m_k(\mu^c) = m_k \left( \Lambda_{1+\frac{1}{2c}} \left( \sigma + \frac{1}{c} \hat{\sigma}^{\{1\}} + \frac{1}{c^2} \hat{\sigma}^{\{2\}} \right) \right) + o \left( \frac{1}{c^2} \right)$$

où  $\hat{\sigma}^{\{1\}}$  est une mesure de masse totale nulle de densité

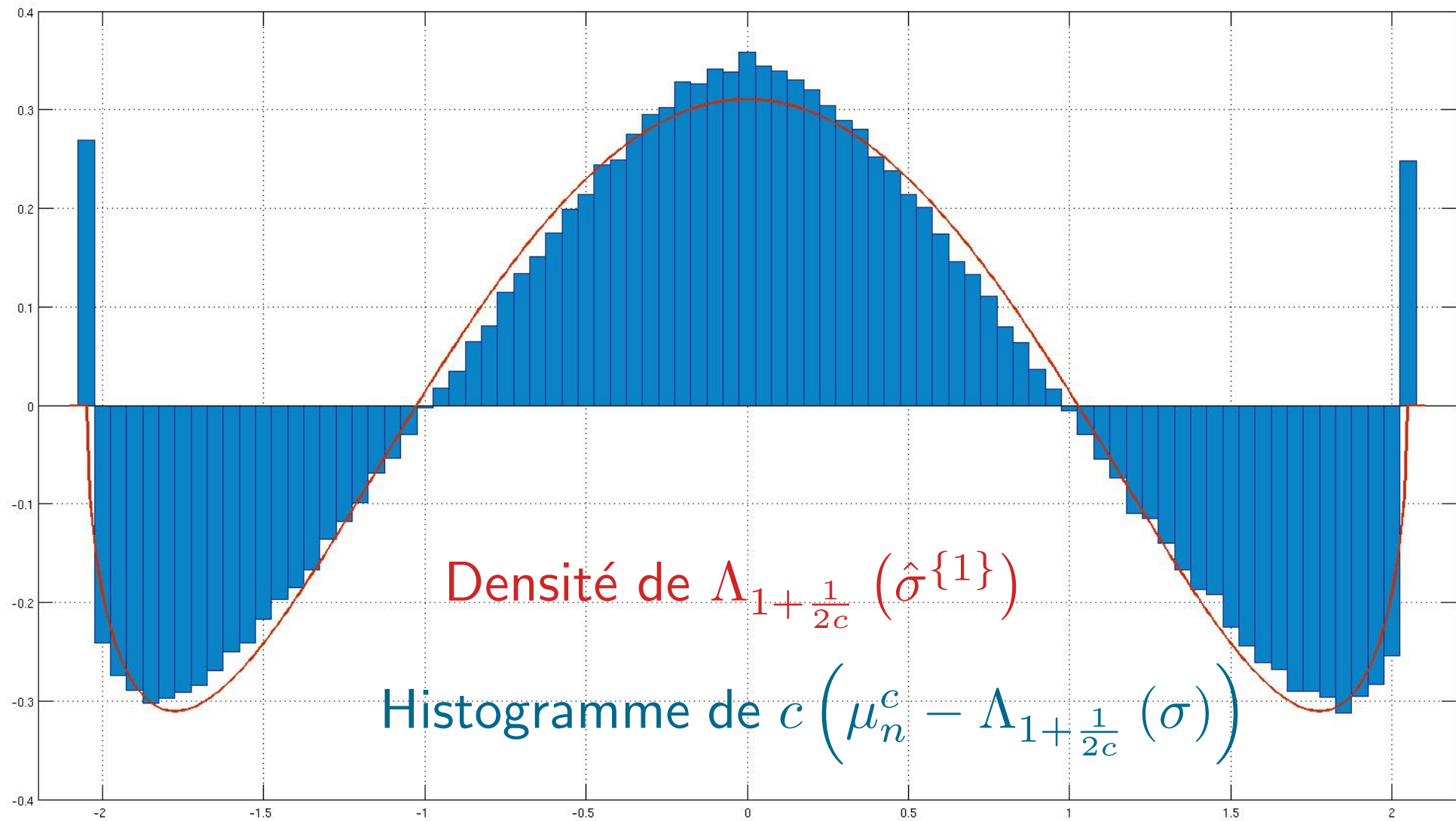
$$-\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2\pi\sqrt{4 - x^2}} \mathbf{1}_{|x| < 2}$$

et  $\hat{\sigma}^{\{2\}}$  est une mesure de masse totale nulle de densité

$$-\frac{2x^8 - 17x^6 + 46x^4 - \frac{325}{8}x^2 + \frac{21}{4}}{\pi\sqrt{4 - x^2}} \mathbf{1}_{|x| < 2}.$$

# Simulations

100 matrices de taille 10000 avec  $c = 20$



# Simulations

100 matrices de taille 10000 avec  $c = 20$

Histogramme de  $c^2 \left( \mu_n^c - \Lambda_{1+\frac{1}{2c}} \left( \sigma + \frac{1}{c} \hat{\sigma}^{\{1\}} \right) \right)$       Densité de  $\Lambda_{1+\frac{1}{2c}} \left( \hat{\sigma}^{\{2\}} \right)$

