

# Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3

Olivier GLASS

Université Paris-Sud, Analyse numérique et EDP, 91405 Orsay.  
E-mail : Olivier.Glass@math.u-psud.fr

---

**Résumé.** Nous montrons la contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles tridimensionnels, sur un ouvert borné simplement connexe, quand le contrôle agit sur une partie ouverte du bord qui en rencontre chaque composante connexe.

## *Exact boundary controllability of 3-D Euler equation of perfect incompressible fluids*

**Abstract.** We prove the exact boundary controllability of the 3-D Euler equations of incompressible perfect fluids, on a simply connected bounded open set, when the control operates on an open part of the boundary, which meets any of its connected components.

---

## *Abridged English Version*

Let  $\Omega$  be a non-empty, open, simply connected, bounded, and regular (say  $C^\infty$ -regular) domain of  $\mathbb{R}^3$ . Let  $\Gamma_0$  be an open and non-empty subset of its boundary, which meets any connected component of  $\partial\Omega$ . We are interested in the exact boundary controllability of the 3-D Euler equation of perfect incompressible fluids for  $(\Omega, \Gamma_0)$ , that is, the following question: given  $T > 0$ , given  $y_0$  and  $y_1$  two solenoidal vector fields, *i.e.* satisfying:

$$(1) \quad \operatorname{div} y_0 = \operatorname{div} y_1 = 0,$$

regular (in this paper,  $C^{2,\alpha}$  for some Hölder coefficient  $\alpha \in (0, 1)$ ) and which verify:

$$(2) \quad y_0 \cdot n = y_1 \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_0,$$

where  $n$  is the outward unit normal vector field on  $\partial\Omega$ , does there exist a solution  $y$  of the Euler system

$$(3) \quad \operatorname{div} y = 0,$$

$$(4) \quad \partial_t y + (y \cdot \nabla)y = \nabla p$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

## O. Glass

for some  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ , with:

$$(5) \quad y(x, t) \cdot n = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_0,$$

$$(6) \quad y|_{t=0} = y_0, \quad y|_{t=T} = y_1?$$

This problem, raised by J.-L. Lions in [7], was solved in the two-dimensional case by J.-M. Coron in [3] and [4]. Here we prove that the result still holds in dimension 3:

**THEOREM 1.** – *Given  $\alpha \in (0, 1)$ , given  $y_0$  and  $y_1$  in  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  verifying (1) and (2), and given  $T > 0$ , there exists a function  $y$  in  $C([0, T]; C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)) \cap L^\infty([0, T]; C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3))$ , such that (3)-(7) hold for some  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ .*

As in [3] and [4], the steps of the proof of Theorem 1 are the following: first, we prove that this problem can be reduced to the problem of zero-controllability with small initial data (that is  $y_1 = 0$  and  $\|y_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)} < \varepsilon$ ) but for small time  $T$ . Then, to solve that last problem, we use a method called the “return method”, used in [3] and [4], and introduced in [2] for a stabilization problem. Precisely, – since the linearized Euler equation around  $y \equiv 0$  is not controllable – we consider the linearized system around a particular solution  $\bar{y}$  verifying  $\bar{y}|_{t=0} = \bar{y}|_{t=T} = 0$ , but nonvanishing (a kind of “loop”).

This particular solution will be given to us by the following proposition, where we have fixed a bounded smooth open domain  $\bar{\Omega}$ , containing  $\bar{\Omega}$ :

**PROPOSITION 1.** – *For all  $x$  in  $\bar{\Omega}$ , there exists  $\theta \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, 1]; \mathbb{R})$  verifying:*

$$(7) \quad \text{Supp } \theta \subset \bar{\Omega} \times [1/4, 3/4],$$

$$(8) \quad \Delta\theta = 0 \text{ in } \bar{\Omega} \times [0, 1],$$

$$(9) \quad \partial_n \theta = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_0,$$

$$(10) \quad \phi^{\nabla\theta}(x, 0, 1) \subset \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega},$$

where we denote by  $\phi^{\nabla\theta} : \bar{\Omega} \times [0, T] \times [0, T] \longrightarrow \bar{\Omega}$ ,  $(x, t_1, t_2) \mapsto \phi^{\nabla\theta}(x, t_1, t_2)$  the flow of  $\nabla\theta$ , i.e. the functions which verify:

$$(11) \quad \frac{\partial\phi}{\partial t_2} = \nabla\theta(\phi, t_2), \quad \phi(x, t_1, t_1) = x.$$

In this presentation, the control itself is not explicit. As a control, we can take for example  $y \cdot n$  on  $\Gamma_0 \times [0, T]$  and  $(\text{curl } y) \wedge n$ , where  $y \cdot n < 0$  in  $\Gamma_0$  (see [6]).

Soit  $\Omega$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^3$ , que nous supposons de plus simplement connexe et de classe  $C^\infty$ . Considérons une partie ouverte non vide  $\Gamma_0$  de son bord  $\partial\Omega$ , qui rencontre chaque composante connexe de celui-ci.

Le problème auquel nous nous intéressons est le suivant : pour un temps positif  $T$ , et pour deux champs de vecteurs  $y_0$  et  $y_1$ , solénoïdaux (c'est-à-dire satisfaisant (1)) et satisfaisant (2) sur le bord, existe-t-il une solution  $(y, p)$  à l'équation d'Euler pour les fluides incompressibles (3)-(4), telle que de plus les conditions (5)-(6) soient vérifiées, où  $n$  désigne la normale extérieure à  $\partial\Omega$  ?

Une réponse positive à ce problème – posé par J.-L. Lions dans [7] – a été donnée par J.-M. Coron dans [3] et [4], dans le cas de l'équation d'Euler en dimension 2.

Nous nous proposons de démontrer que ce résultat est également valable en dimension 3 en utilisant une méthode analogue. Nous ferons pour cela appel à la construction de solutions à l'équation d'Euler tridimensionnelle décrite dans [1]. Précisément, nous montrons le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** – Soient  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $T > 0$  et  $y_0$  et  $y_1$  deux fonctions de  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ , de divergence nulle, et vérifiant (2). Alors il existe une fonction  $y \in C([0, T]; C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)) \cap L^\infty([0, T]; C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3))$  solution de (3)-(5) pour un certain  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$ , et vérifiant la propriété (6).

Comme dans [3] et [4], les étapes de la démonstration du théorème 1 sont les suivantes : nous nous ramenons au cas où  $y_1 = 0$  et  $y_0$  petit. Pour étudier ce problème, nous utilisons la « méthode du retour » introduite dans [2] par J.-M. Coron pour résoudre un problème de stabilisation. Plutôt que d'étudier l'équation linéarisée autour de  $y = 0$  – qui n'est pas contrôlable –, nous étudions l'équation linéarisée autour d'une « boucle » (c'est-à-dire d'une solution partant du profil de vitesse nul pour  $y$  revenir particulière. De là, pour  $y_0$  petit, nous parvenons à trouver une solution proche de cette boucle.

Ajoutons que l'on peut prendre comme contrôle au bord (implicite dans notre formulation) :  $y \cdot n$  sur  $\Gamma_0$  et  $(\text{rot } y) \wedge n$ , où  $y \cdot n < 0$  dans  $\Gamma_0$  (voir pour cela [6]).

*Démonstration du théorème 1.* – Commençons par remarquer que pour  $(y, p)$  solution de (3)-(4) sur  $[0, T]$ ,  $\tilde{y}(x, t) := \varepsilon^{-1}y(x, \varepsilon^{-1}t)$  et  $\tilde{p}(x, t) := \varepsilon^{-2}p(x, \varepsilon^{-1}t)$  ainsi que  $(0, 0)$  et  $(\tilde{y}'(T-t), \tilde{p}'(T-t))$  sont également solutions là où elles sont définies. En les combinant, on voit bien que l'on peut se ramener à l'étude du cas  $y_1 = 0$  et  $|y_0|_{C^{1,\alpha}} < \nu$  pour  $\nu$  à déterminer.

Pour cela, nous fixons un ouvert borné régulier  $\tilde{\Omega}$ , contenant  $\bar{\Omega}$ , et nous considérerons une solution particulière de l'équation (3)-(4), construite grâce à la proposition suivante que nous vérifierons plus tard :

**PROPOSITION 1.** – Pour tout  $x$  dans  $\bar{\Omega}$ , il existe  $\theta \in C^\infty(\tilde{\Omega} \times [0, 1]; \mathbb{R})$  tel que (7)-(10) soient vérifiées, où  $\phi^{\nabla\theta} : \tilde{\Omega} \times [0, T] \times [0, T] \longrightarrow \tilde{\Omega}$ ,  $(x, t_1, t_2) \mapsto \phi^{\nabla\theta}(x, t_1, t_2)$ , désigne le flot de  $\nabla\theta$ , c'est-à-dire est défini par (10).

Il en découle que l'on peut trouver par compacité de  $\tilde{\Omega}$  un nombre fini  $k$  de points  $x_i$ ,  $k$  réels  $r_i > 0$ ,  $k$  fonctions  $\theta_i$  vérifiant (7)-(9), et un ouvert  $\Omega_2$  contenant  $\bar{\Omega}$  et inclus dans  $\tilde{\Omega}$ , tels que :

$$(12) \quad \bar{B}(x_i, r_i) \subset \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} \subset \cup B(x_i, r_i), \quad \phi^{\nabla\theta_i}(\bar{B}(x_i, r_i), 0, 1) \cap \bar{\Omega}_2 = \emptyset,$$

où  $B(x_i, r_i)$  désigne la boule ouverte de centre  $x_i$  et de rayon  $r_i$ .

C'est à partir de ces  $\nabla\theta_i$  que nous allons construire notre « boucle » : soit en effet  $\nabla\theta$  défini ainsi :

$$(13) \quad \nabla\theta(x, t) = \sigma(t)(4m/T)\nabla\theta_j(x, (4m/T)(t - t_{j-1})), \quad \forall (x, t) \in \tilde{\Omega} \times [t_{j-1}, t_j],$$

où l'on a préalablement découpé l'intervalle  $[0, T]$  de la façon suivante :

$$(14) \quad t_0 = T/2, \quad t_{j-\frac{1}{2}} = t_0 + (j-1)(T/2m) + (T/4m), \quad t_j = t_{j-\frac{1}{2}} + (T/4m),$$

avec  $m$  choisi de sorte que  $t_k = \frac{99}{100}T$ , et  $j \in \{1, \dots, k\}$ , et avec  $\sigma(t)$  qui vaut 1 sur  $[t_{j-1}, t_{j-\frac{1}{2}}[$  et  $-1$  sur  $[t_{j-\frac{1}{2}}, t_j[$ .

Nous noterons  $y^* = \nabla\theta$  dans  $C^\infty(\tilde{\Omega} \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{y}$  sa restriction à  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . Nous introduisons à présent un opérateur continu  $\pi$  de prolongement des fonctions  $C^{[\lambda], \lambda-[\lambda]}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  à des fonctions de  $C^{[\lambda], \lambda-[\lambda]}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , à support dans  $\Omega_2$ , pour tout  $\lambda \in [0, 3[$ , et une fonction  $\mu$  de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , de classe  $C^\infty$  égale à 1 sur  $[0, 1/4]$  et à 0 sur  $[3/4, 1]$ .

En suivant [4], nous allons mettre en évidence une solution de notre problème de contrôle, sous forme d'un point fixe d'une certaine application  $F$ , définie sur les fonctions  $y \in C^0([0, T], C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))$  telles que  $\|y - \bar{y}\|_{C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])} < \nu_1$  avec  $\nu_1 > 0$  à définir, et telles que :

$$(15) \quad y \cdot n = \mu(t/T)y_0 \cdot n + \bar{y} \cdot n \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T].$$

## O. Glass

Nous introduisons pour cela une partition de l'unité adaptée au recouvrement de  $\bar{\Omega}$  par les ouverts  $B(x_i, r_i)$ , c'est-à-dire des fonctions  $\kappa_i \in C_0^\infty(\bar{\Omega}; [0, 1])$  telles que :

$$(16) \quad \text{Supp } \kappa_i \subset B(x_i, r_i), \quad \sum_i \kappa_i \equiv 1 \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Pour  $y \in C^0([0, T], C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))$ , considérons  $\tilde{y}$  définie sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  par  $\tilde{y} = y^* + \pi(y - \bar{y})$ .

Nous allons maintenant construire  $\omega : \bar{\Omega} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , continu en temps de  $\bigcup ]t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}[$  dans  $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , avec des limites à gauche et à droite de chaque  $t_{i-\frac{1}{2}}$ . Définissons-le ainsi :

$$(17) \quad \omega(x, t) = \text{rot}(\pi y_0)(x) \quad \text{sur } [0, t_0] \times \bar{\Omega},$$

$$(18) \quad \partial_t \omega + (\tilde{y} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \tilde{y} - (\text{div } \tilde{y}) \omega \quad \text{sur les } ]t_{i-1/2}, t_{i+1/2}[,$$

$$(19) \quad \omega(\cdot, t_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{l=i+1}^k w_l^i(\cdot, t_{i-\frac{1}{2}}) \quad \text{sur } \bar{\Omega},$$

où  $w_l^i \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times [t_{i-1}, t_{i-\frac{1}{2}}])$  est défini par :

$$(20) \quad \partial_t w_l^i + (\tilde{y} \cdot \nabla) w_l^i = (w_l^i \cdot \nabla) \tilde{y} - (\text{div } \tilde{y}) w_l^i, \quad w_l^i(\cdot, t_{i-1}) = \text{rot}(\kappa_l(\pi y_0)).$$

Notons que, en vertu de (12) et (16), pour  $\|y - \bar{y}\|_{C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])}$  petit, le support de  $w_l^i(\cdot, t_{i-\frac{1}{2}})$  est inclus dans  $\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_2$ , et donc que la restriction de  $\omega$  à  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  est dans  $C([0, T], C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ .

Par ailleurs,  $\omega$  reste de divergence nulle sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ , car il vérifie sur  $\bar{\Omega} \times ([0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^k ]t_{i-\frac{1}{2}}])$  (et de même pour  $w_l^i$ ) :

$$\partial_t(\text{div } \omega) + (\tilde{y} \cdot \nabla)(\text{div } \omega) = -(\text{div } \tilde{y})(\text{div } \omega).$$

On peut donc définir notre  $z = F(y)$  ainsi :

$$(21) \quad \begin{cases} \text{rot } z = \omega \text{ et } \text{div } z = 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \times [0, T], \\ z \cdot n = \mu(t/T) y_0 \cdot n + \bar{y} \cdot n & \text{sur } \partial\bar{\Omega} \times [0, T]. \end{cases}$$

Pour montrer que cela est possible, il faut en fait un peu plus que  $\text{div } \omega = 0$ . En effet, lorsque l'ouvert  $\Omega$  a une topologie telle que  $H_2(\Omega) \neq 0$ , il faut en plus que l'on ait :

$$(22) \quad \int_{\Omega} \omega(\cdot, t) \nabla \mathcal{P}^s dx = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall s \in \{1, \dots, \bar{s}\},$$

où l'on a défini  $\bar{s}$  et les  $\mathcal{P}^s$  de la façon suivante : on note les composantes connexes de  $\partial\bar{\Omega}$   $\gamma_0, \dots, \gamma_{\bar{s}}$ , et on définit  $\mathcal{P}^s$  pour  $s \in \{1, \dots, \bar{s}\}$  ainsi :

$$\Delta \mathcal{P}^s = 0 \text{ sur } \Omega, \quad \mathcal{P}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } (\partial\bar{\Omega} \setminus \gamma_s), \quad \mathcal{P}|_{\partial\Omega} = 1 \text{ sur } \gamma_s,$$

Or ces relations (22) sont de toute évidence vraies dans notre cas au temps 0, puisque  $\omega(\cdot, 0) = \text{rot } y_0$  sur  $\bar{\Omega}$ . Ces relations persistent par la suite ; en effet (en omettant les indices  $s$  inutiles), un calcul donne :

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega \cdot \nabla \mathcal{P} dx = \int_{\partial\Omega} (\omega^i y^j \mathcal{P}_j n^i - \omega^j \mathcal{P}_j y^i n^i) d\sigma,$$

où on note les dérivations en indice et les coordonnées des vecteurs en exposant. Or,  $\mathcal{P}$  est constant sur chacune des composantes connexes de  $\partial\Omega$ , et  $\nabla\mathcal{P}$  est donc normal sur le bord. On peut en déduire que  $(\omega \cdot n)(y \cdot \nabla\mathcal{P}) = (\omega \cdot \nabla\mathcal{P})(y \cdot n)$  sur le bord. D'où la nullité du terme de droite.

Nous allons à présent montrer que, au moins pour  $y_0$  petit dans  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $F$  admet un point fixe dans  $C([0, T], C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))$ , et que ce point fixe constitue une solution de notre problème.

Soit la suite de fonctions définie ainsi :  $y^0(x, t) = \mu(t/T)y_0(x) + \bar{y}(x, t)$ , puis  $y^{l+1} = F(y^l)$  avec  $\omega^{l+1}$  défini comme précédemment sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .

Notons  $\|\cdot\|_{i,\alpha,\bar{X}}$  la norme dans l'espace de Hölder  $C^{i,\alpha}(\bar{X})$ .

Nous ferons appel à une technique employée par C. Bardos et U. Frisch dans [1]. En particulier, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1 (voir [1]). – Soient  $u, v$  et  $g$  trois fonctions quelconques de  $C^0([0, T], C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))$  telles que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla)u = g, \quad v \cdot n|_{\partial\bar{\Omega} \times [0, T]} = 0,$$

alors on a  $\frac{d}{dt^+} \|u\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}} \leq \|g\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}} + \alpha \|\nabla v\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}} \cdot \|u\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}$ .

Remarquons tout d'abord que  $\tilde{y}^l := y^* + \pi(y^l - \bar{y})$  est nul sur  $\partial\bar{\Omega} \times [0, T]$ . De là, on peut déduire que pour  $t \in [0, t_0[$  et tout  $t \in ]t_{i-1/2}, t_{i+1/2}[$ , pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  :

$$\frac{d}{dt^+} \|\omega^{l+1}\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t) \leq C_1 \|\omega^{l-1}\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t) \cdot \|\tilde{y}^l\|_{1,\alpha,\bar{\Omega}}(t).$$

Or, on a par ailleurs :

$$\|\tilde{y}^l\|_{1,\alpha,(\bar{\Omega})}(t) \leq C_4 \|y^l\|_{1,\alpha,\Omega}(t),$$

et grâce à (21),  $\|y^l\|_{1,\alpha,\Omega}(t) \leq C_5 + C_6 \|\omega^l\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t)$ . On a donc pour  $t \in [0, t_0[ \cup ]t_{i-1/2}, t_{i+1/2}[$ ,  $\frac{d}{dt^+} \|\omega^{l+1}\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t) \leq C \|\omega^{l+1}\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t) (1 + \|\omega^l\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(t))$ . Nous allons déduire de ceci, que pour un certain  $M$ ,  $\|\omega^l\|_{0,\alpha}(t) \leq M\mathcal{L}(t)$ , où  $\mathcal{L}$  est la fonction réelle définie par :

$$(24) \quad \mathcal{L}' = C(\mathcal{L} + \mathcal{L}^2), \quad \mathcal{L}(0) = \|\omega^{l+1}\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}(0) = \|\text{rot}(\pi y_0)\|_{0,\alpha,\bar{\Omega}}.$$

(Notons tout de suite qu'on peut supposer que  $\mathcal{L}$  ne diverge pas sur  $[0, T]$ , si  $\|y_0\|_{1,\alpha}$  est assez petit.)

Une récurrence simple en  $l$  nous permet d'affirmer que  $\|\omega^l\|_{0,\alpha}(t) \leq \mathcal{L}(t)$  pour  $t < t_{\frac{1}{2}}$  et un certain  $M > 0$ . Ensuite, comme la norme de  $\omega^l$  au temps  $t_{\frac{1}{2}}^+$  est inférieure à un certain  $L \|\omega^l(t_{\frac{1}{2}}^-)\|$ , la majoration reste valable localement à droite de  $t_{\frac{1}{2}}$ . Elle l'est ensuite sur l'intervalle  $[t_{\frac{1}{2}}, t_{\frac{3}{2}}[$  par le même argument de récurrence, et ainsi de suite.

Remarquons que comme on part de  $y_0$  de classe  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , on peut obtenir de même des bornes  $C([0, T]; C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))$  pour  $\omega$  (en considérant l'équation des dérivées).

C'est par cette même estimée que l'on voit que cette suite est bien définie pour  $\|y_0\|_{1,\alpha,\Omega}$  petit. En effet,  $\omega^{l+1}$  n'est bien défini que lorsque  $y^l$  est tel que  $\|\bar{y} - y^l\|_{C([0, T], C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}))} < \nu_1$  (pour que  $w_i^l$  ait bien son support en dehors de  $\Omega_2$ ). Or on vient de mettre en évidence une borne sur  $\|\omega^l\|_{0,\alpha}(t)$  en  $C\|y_0\|_{1,\alpha,\Omega}$ . Pour  $y_0$  assez petit, on a donc en vertu de (21),  $\omega^{l+1}$  bien défini.

Nous suivons [1], et allons à présent montrer que la suite  $(\omega^l)$  est de Cauchy dans  $C^0([0, T], C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ . De (18), on déduit :

$$\begin{aligned} \partial_t(\omega^p - \omega^l) + (\tilde{y}^l \cdot \nabla)(\omega^p - \omega^l) &= [(\tilde{y}^p - \tilde{y}^l) \cdot \nabla]\omega^p + [(\omega^p - \omega^l) \cdot \nabla]\tilde{y}^p \\ &+ (\omega^l \cdot \nabla)(\tilde{y}^p - \tilde{y}^l) - (\text{div } \tilde{y}^p)(\omega^p - \omega^l) - (\text{div } \tilde{y}^l - \text{div } \tilde{y}^p)\omega^l. \end{aligned}$$

## O. Glass

On en déduit, à l'aide du lemme 1, que :

$$\frac{d}{dt} \|\omega^p - \omega^l\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \leq C(\|\omega^l - \omega^k\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) + \|\omega^{l-1} - \omega^{p-1}\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t)),$$

ce qui implique :

$$\|\omega^{p+k} - \omega^{l+k}\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(t) \leq K((e^{Ct})^{\alpha k}/k!) \max_{s \in [0,T]} \|\omega^p - \omega^l\|_{0,\alpha,\tilde{\Omega}}(s),$$

d'où les convergences de  $\omega^l$  et  $\tilde{y}^l$  vers  $w$  et  $u$  sur  $[0, t_{\frac{1}{2}}]$  (resp. dans  $C^0([0, t_{\frac{1}{2}}], C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega}))$  et  $C^0([0, t_{\frac{1}{2}}], C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega}))$ ), puis de proche en proche dans  $C^0([t_{\frac{1}{2}}, t_{\frac{3}{2}}], C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega}))$  et  $C^0([t_{\frac{1}{2}}, t_{\frac{3}{2}}], C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega}))$ , etc.

La fonction  $u \in C^0([0, T], C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty([0, T], C^{2,\alpha}(\tilde{\Omega}))$  vérifie de toute évidence (3)-(5) (parce que  $\Omega$  est simplement connexe), et (6) dérive directement de notre action aux temps  $t_{i-\frac{1}{2}}$  décrite par la formule (19) et de (15).

Il nous reste à présent à achever de démontrer la proposition 1.

Notons que dans le cas d'un point intérieur au domaine, ceci a déjà été démontré par J.-M. Coron dans [5], Lemma A.1. Dans le cas d'un point du bord, montrons que tout vecteur tangent en ce point peut être atteint comme gradient en ce point d'une fonction harmonique vérifiant (10).

Supposons que tel n'est pas le cas : il existe un point  $\bar{x}$  du bord et un vecteur  $V \neq 0$  du plan tangent en  $\bar{x}$  à  $\partial\Omega$  tels que pour tout  $\phi$  harmonique sur  $\Omega$  telle que  $\partial_n \phi = 0$  sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$ , on ait  $\nabla \phi(\bar{x}) \cdot V = 0$ .

Montrons que cela n'est pas possible, et pour cela considérons le domaine « augmenté »  $\Omega^*$  : nous considérons un domaine qui contient  $\Omega$ , et dont le bord coïncide avec  $\partial\Omega$  sauf sur  $\Gamma_0$ , le long duquel il « étend »  $\Omega$ , de sorte que l'on peut trouver un ouvert non vide  $\Omega^\#$  inclus dans  $\Omega^* \setminus \Omega$ .

On considère un point  $\bar{a} \in \Omega^\#$  fixé, et pour  $a \in \Omega^\#$  la solution  $\psi^a$  sur  $\bar{\Omega}^*$  de :

$$(25) \quad -\Delta \psi^a = \delta_{\bar{a}} - \delta_a,$$

avec condition de Neuman au bord et de moyenne nulle. On a  $\nabla \psi^a(\bar{x}) \cdot V = 0$ , puis par analyticité en  $a$  de  $\nabla \psi^a(\bar{x})$ , cela reste vrai même si  $a \in \Omega$ . Or on a, pour  $a$  proche de  $\bar{x}$  :

$$\nabla \psi^a(\bar{x}) = |a - \bar{x}|^{-3}(P(a) - \bar{x}) + o(|a - \bar{x}|^{-2}),$$

d'où une contradiction. Il suffit ensuite de suivre la démonstration de [5].

Note remise le 24 mars 1997, acceptée le 15 septembre 1997.

## Références bibliographiques

- [1] **Bardos C. et Frisch U., 1975.** Finite-time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluids using Hölder estimates, Springer Verlag, *Lect. Notes in Math.* 565, p. 1-13.
- [2] **Coron J.-M., 1992.** Global Asymptotic Stabilization for controllable systems without drift, *Math. Control Signal Systems*, 5, p. 295-312.
- [3] **Coron J.-M., 1993.** Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, Série I, p. 271-276.
- [4] **Coron J.-M., 1996.** On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *J. Math. Pures Appl.*, 75, p. 155-188.
- [5] **Coron J.-M., 1996.** On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, *ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations*, <http://www.emath.fr/cocv/>, 1, p. 35-75.
- [6] **Kazhikov A. V., 1981.** Note on the formulation of the problem of flow through a bounded region using equations of perfect fluid, *PMM USSR*, 44, p. 672-674.
- [7] **Lions J.-L., 1990.** Are there connections between turbulence and controllability?. 9th *INRIA International Conference*, Antibes, June 12-15.