U. Dauphine/MD2/C. Robert 2001/2002

Statistique

Examen du 12 juin 2002

Sans document (durée deux heures).
Calculatrice non programmable autorisée. Exercices indépendants.

Exercice 1

Une particule radioactive se désintègre de façon aléatoire, et a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de paramètre ℓ, $\ell > 0$.

On considère n particules du type précédent, dont les désintégrations sont indépendantes. On note $T_1, T_2, \ldots, T_n$ leurs durées de vie respectives. On note S_n et R_n les temps de désintégration respectifs de la première et de la dernière particule. On a donc

$$S_n = \min(T_1, \ldots, T_n) \quad \text{et} \quad R_n = \max(T_1, \ldots, T_n)\,.$$

1. Calculer les fonctions de répartition des variables S_n et R_n.
2. Etudier la convergence **en loi** de la suite $(nS_n)_{n\geq 1}$.
3. Montrer que la suite $(R_n/n)_{n\geq 1}$ converge **en loi** vers la variable certaine égale à 0.
4. La suite $(R_n/n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle **en probabilité** ?
5. On pose $M_n = (T_1 + \ldots + T_n)/n$. Quelle est la limite **en probabilité** de la suite $(M_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de densité

$$f(x_1, x_2) = c\, x_1 e^{-x_1 x_2}\, \mathbb{I}_{0\leq x_1, x_2 \leq 1}$$

où c est la constante de normalisation.

1. Montrer que $c = e$.

2. Les composantes X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. Donner la fonction de répartition de la variable $Z = \max(X_1, X_2)$. En déduire que la probabilité $\varrho = P(Z < 0.762)$ vaut $\varrho = 0.50$.

On considére à présent une suite $(X_1^i, X_2^i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs indépendants, tous de loi de densité f.

4. Si Z_i dénote $\max(X_1^i, X_2^i)$, donner la loi de N, nombre de Z_i dépassant 0.762.

5. Pour $n = 100$, en utilisant l'**approximation** *[que l'on pourra justifier]*

$$\frac{N}{n} \sim \mathcal{N}\left(0.5, \frac{0.25}{n}\right),$$

et le fait que, pour une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la probabilité de dépasser 1.68 vaut 0.05, donner la valeur numérique $N^\star$ telle que

$$P(N \leq N^\star) = 0.95\,.$$

Si X suit la loi de densité f, et si $\sigma > 0$, on définit $Y = \sigma X = (\sigma X_1, \sigma X_2) = (Y_1, Y_2)$.

6. Donner la densité f_σ de Y.

7. Pour un échantillon $Y_1, \ldots, Y_n$ de vecteurs indépendants tous de loi f_σ, donner une statistique exhaustive, $T(Y_1, \ldots, Y_n)$.

8. En déduire un estimateur sans biais de σ^2.

Identifiant :

Questionnaire à choix multiples (5 points)

(Une seule réponse valable par question à cocher sur cette feuille; réponse positive : `+1`, non réponse : `0` et réponse négative : `-1`)

1. Si (X_1, X_2) est un vecteur normal de moyenne (μ_1, μ_2) et de matrice de variance-covariance $\begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix}$, la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est

   ○ $\mathcal{N}_1(\mu_2 + x_1, \varrho^2)$ ○ $\mathcal{N}_1(\mu_2 + \varrho(x_1 - \mu_1), 1 - \varrho^2)$
   ○ $\mathcal{N}_1(\varrho(x_1 - \mu_1), 1 + \varrho^2)$ ○ $\mathcal{N}_1(\mu_2 + (x_1 - \mu_1)/\varrho, 1/\varrho^2)$

2. Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois gamma[1] $\mathcal{G}a(\alpha_1, 1)$ et $\mathcal{G}a(\alpha_2, 1)$, la variable aléatoire $X_1/(X_1 + X_2)$ a comme loi

   ○ $\mathcal{G}a(\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2), 1)$ ○ $\mathcal{G}a(\alpha_1/\alpha_2, \alpha_1^2/(\alpha_1 + \alpha_2))$
   ○ $\mathcal{N}(\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1\alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)^2)$ ○ $\mathcal{B}e(\alpha_1, \alpha_2)$

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables indépendantes de fonctions génératrices respectives $F_1, \ldots, F_n$. Alors $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ a comme fonction génératrice

   ○ $G(t) = \sqrt[n]{F_1(t) \ldots F_n(t)}$ ○ $G(t) = F_1(t/n) + \ldots + F_n(t/n)$
   ○ $G(t) = (F_1(t) + \ldots + F_n(t))/n$ ○ $G(t) = F_1(t/n) \ldots F_n(t/n)$

4. Si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F_X et U une variable uniforme,

   ○ X a même loi que $F_X^{-1}(U)$ ○ U a même loi que $F_X^{-1}(X)$
   ○ U a même loi que $F_X(X)$ ○ $F_X(U)$ a même loi que X

5. Si $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon iid de loi $\mathcal{U}(-\theta, \theta)$, une statistique exhaustive minimale est

   ○ $X_{(n)} = \max X_i$ ○ $X_{(1)} = \min X_i$
   ○ $\max |X_i|$ ○ $(X_{(1)}, X_{(n)})$

---

[1] On rappelle que la densité de la loi $\mathcal{G}a(\alpha, 1)$ est $x^{\alpha-1} \exp(-x)/\Gamma(a)$.